6. INTEGRAL

6. 1 Integral Tak Tentu

F(*x*) disebut **suatu <u>anti turunan</u>** dari *f*(*x*) pada interval I bila

$$F'(x) = f(x) \ \forall x \in I$$

Contoh

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ dan $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ adalah anti turunan dari

$f(x) = x^2$ karena F'(x) = f(x).

Anti turunan dari suatu fungsi tidak tunggal, tapi perbedaannya berupa suatu bilangan konstan.

Anti turunan disebut juga Integral Tak tentu.

Notasi :

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

6.2 Sifat-sifat integral tak tentu

A. Sifat yang diperoleh langsung dari turunan

1. $\int x^r\,dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$, r ≠ -1

2. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

3. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

4. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

5. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

B. Sifat Kelinieran

$$\int \left[a\, f(x) + b g(x) \right] dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$$

C. Integral dengan substitusi

Misal *u* = *g*(*x*) , $du = g'(x)dx$, dan *F* suatu anti turunan dari *f*, maka

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Contoh : Hitung $\int \sin\left(2x+1\right)\, dx$

Misal u = 2x + 1 → $du = 2\, dx$ → $dx = \frac{1}{2} du$ sehingga

$$\int \sin\left(2x+1\right) dx = \frac{1}{2} \int \sin u\, du$$

$$= -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos\left(2x+1\right) + C$$

Setelah dilakukan substitusi u = g(x), Integran (fungsi yang diintegralkan) hanya fungsi dari u

STTTELKOM

Contoh : Hitung $\int (x^3+1)^{10}\, x^5\, dx$

Jawab : Misal $u = x^3 + 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$

Maka

$$\int (x^3+1)^{10}\, x^5\, dx = \int u^{10} x^5 \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int u^{10} x^3\, du$$

Integran fungsi dr u dan x

Ctt : x^3 Tidak bisa di keluarkan dari integral, karena bukan suatu konstanta

substitusi x^3 dengan menggunakan hubungan $u = x^3 + 1 \rightarrow x^3 = u - 1$

sehingga

$$\int (x^3+1)^{10}\, x^5\, dx = 1/3\int u^{10}(u-1)\, du = 1/3\int u^{11} - u^{10}\, du = \tfrac{1}{36}u^{12} - \tfrac{1}{33}u^{11} + C$$

$$= \tfrac{1}{36}(x^3+1)^{12} - \tfrac{1}{33}(x^3+1)^{11} + C$$

6.3 Notasi Sigma (Σ)

Notasi sigma (jumlah) :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ dan } \sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k + k + \ldots + k}_{n\ suku} = nk$$

Sifat dan rumus sigma

1. $\sum_{i=1}^{n} \left(ka_i + lb_i\right) = k\sum_{i=1}^{n} a_i + l\sum_{i=1}^{n} b_i$

2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

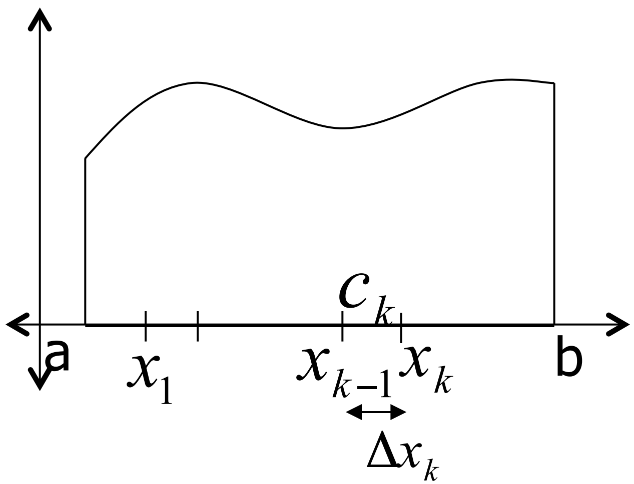
3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Sifat nomor 2 sampai nomor 4 dapat dibuktikan dengan induksi matematika

6.4 Integral Tentu

Integral tentu dikonstruksi dengan jumlah Rieman yang menggambarkan luas daerah. Misal fungsi *f*(*x*) terdefinisi pada selang tutup [*a*,*b*].



Langkah :

1. Partisi selang [*a*,*b*] menjadi *n* selang dengan titik pembagian

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

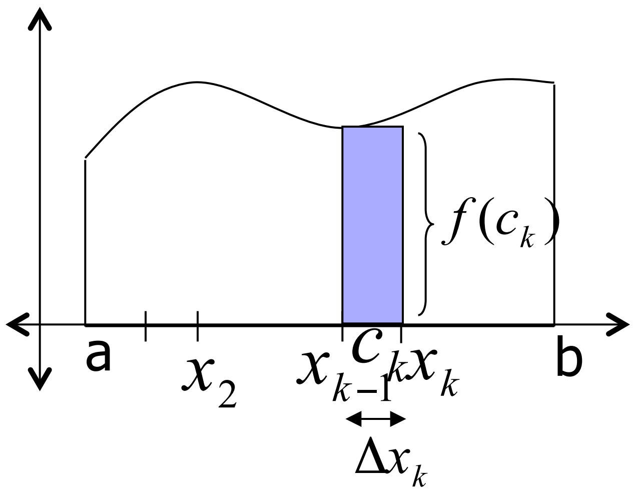
$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, b = x_n\}$$

disebut partisi dari [*a*,*b*].

2. Definisikan panjang partisi *P*, sebagai

$$\| P \| = \underset{1 \le k \le n}{Maks} |\Delta x_k|, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

3. Pilih $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ k = 1, 2, ..., n



4. Bentuk jumlah Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

Jika $\|P\| \to 0$, maka diperoleh limit jumlah Riemann

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

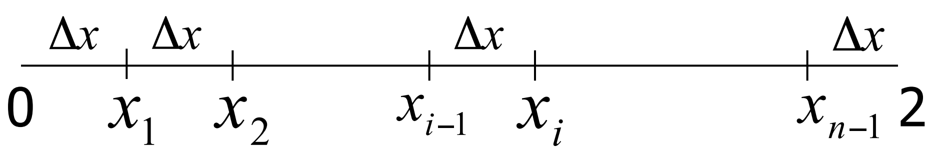
Jika limit ini ada, maka dikatakan *f* terintegralkan Riemann pada selang [*a*,*b*], dan ditulis sbg

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Contoh Hitung $\int_0^2 x - 2\,dx$

Jawab : Langkah

(i) Partisi selang [0,2] menjadi n bagian yang sama panjang $\Rightarrow$ $\Delta x = \dfrac{2}{n}$



sehingga

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= 0 + \Delta x = \frac{2}{n} \\
x_2 &= 0 + 2\Delta x = \frac{2.2}{n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_i &= 0 + i\Delta x = \frac{2i}{n}
\end{aligned}
$$

(ii) Pilih $c_i = x_i$

(iii) Bentuk jumlah reiman

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{2i}{n} - 2\right)\tfrac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{4i}{n^2} - \tfrac{4}{n}\right) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{4}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{4}{n}n = -2 + \frac{2}{n}$$

(iv) Jika $n \to \infty$

$$\int_0^2 x - 2dx = \lim_{n\to\infty}\left(-2 + \tfrac{2}{n}\right) = -2$$

Ctt: Jika fungsi y=f(x) positif pada selang [a,b] maka integral tentu diatas menyatakan luas daerah yang terletak dibawah grafik y=f(x) dan diatas sumbu x antara garis x = a dan x = b

Sifat integral tentu

1. Sifat linear

$$\int_a^b \left[p\,f(x) + q\,g(x)\right] dx = p\int_a^b f(x)\,dx + q\int_a^b g(x)\,dx$$

2. Jika a < b < c, maka

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

3. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ dan $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

4. Bila *f*(*x*) ganjil , maka $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

5. Bila *f*(*x*) genap, maka $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Contoh Hitung

$$\int_{-3}^{3} x\sqrt{x^4 + x^2 + 7}\;dx$$

Jawab

$$f(-x) = -x\sqrt{(-x)^4 + (-x)^2 + 7} = -x\sqrt{x^4 + x^2 + 7} = -f(x)$$ ⇨ f(x) ganjil

⇨ $$\int_{-3}^{3} x\sqrt{x^4 + x^2 + 7}\;dx = 0$$

6.6 Teorema Dasar Kalkulus (TDK)

6.6.1 TDK I

Misal *f*(*x*) kontinu pada [*a*,*b*] dan *F*(*x*) suatu anti turunan dari *f*(*x*).
Maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Contoh Selesaikan integral tentu $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2x)\,dx$

Jawab : Misal $u = 2x$ → $du = 2\,dx$. Maka $\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$
Sehingga

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2x)dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{-1}{2}(\cos 2\pi - \cos\pi) = -1$$

Contoh hitung

$$\int_1^5 | x - 2 | \, dx$$

Jawab :

$$f(x) = | x - 2 | = \begin{cases} x - 2, x \geq 2 \\ -(x - 2), x < 2 \end{cases}$$

$$\int_1^5 | x - 2 | \, dx = \int_1^2 -(x - 2) dx + \int_2^5 (x - 2) dx \quad = \tfrac{-1}{2} x^2 + 2x \Big|_1^2 + \tfrac{1}{2} x^2 - 2x \Big|_2^5$$

= ((-2 + 4) – (-1/2+ 2)) + ((25/2 - 10) – (2 – 4))

= ½+9/2 = 5

6.6.2 TDK II (Pendiferensialan Integral Tentu)

- Jika fungsi *f* kontinu pada [*a*,*b*], dan *x* sebuah (variabel) titik dalam [*a*,*b*], maka

$$D_x\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Secara umum

$$D_x\left(\int_a^{u(x)} f(t)\,dt\right) = f(u(x))u'(x)$$

$$D_x\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

Contoh Hitung G'(x) dari

a. $G(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^3}\, dt$ b. $G(x) = \int_4^{x^2} \sqrt{1+t^3}\, dt$

Jawab

a. $f(t) = \sqrt{1+t^3}$ $\Longrightarrow$ $G'(x) = \sqrt{1+x^3}$

b. $f(t) = \sqrt{1+t^3}$ $\Longrightarrow$ $G'(x) = \sqrt{1+(x^2)^3}\; Dx(x^2)$

$u(x) = x^2$ $= 2x\sqrt{1+x^6}$

Soal Latihan

A. Untuk soal 1-5 carilah anti turunan *F(x) + C* bila

1. $f(x) = 3x^2 + 10x + 5$
2. $f(x) = x^2(20x^7 - 7x^5 + 6)$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{6}{x^7}$
4. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2}$
5. $f(x) = x^{-3/4}$

Selesaikan integral tak tentu berikut

6. $\int \left(x^2 - 4\right)^3 2x \, dx$

7. $\int \left(x^2 - 3x + 2\right)^2 (2x - 3) \, dx$

8. $\int 3x\sqrt{3x^2 + 7} \, dx$

9. $\int \left(5x^2 + 1\right)\sqrt{5x^3 + 3x - 2} \, dx$

10. $\int \frac{3y}{\sqrt{2y^2 + 5}} dy$

11. $\int \left(\cos^4 2x\right)\left(-2 \sin 2x\right) dx$

B. Untuk soal 1 s/d 4 hitung $\int_0^5 f(x)\,dx$

1. $f(x) = \begin{cases} x+2 \ , & 0 \le x < 2 \\ 6-x \ , & 2 \le x \le 5 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x \ , & 0 \le x < 1 \\ 1 \ , & 1 \le x \le 3 \\ x-4 \ , & 3 < x \le 5 \end{cases}$

3. f(x) = |x -1|

4. $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}$

Untuk soal 5 s/d 10 hitung integral tentu berikut

5. $\displaystyle\int_{-1}^{0} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

6. $\displaystyle\int_{-3}^{3} 8t\sqrt{7+2t^2}\,dt$

7. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}\,dx$

8. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 3x \cos 3x\,dx$

9. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} |\sin x|\,dx$

10. $\displaystyle\int_{0}^{8} |x^2-6x+8|\,dx$

Untuk soal 11 s/d 15 tentukan $G'(x)$ dari

11. $G(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$

12. $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t^2+1}\,dt$

13. $G(x) = \int_2^{x^2+1} \sqrt{2+\sin t}\;dt$

14. $G(x) = \int_\pi^x \tan(s^2)\,ds$

15. $G(x) = \int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$

16. Tentukan dimana *f* cekung ke atas, jika $f(x) = \int_0^x \frac{1+t}{1+t^2} dt$

17. Jika *f* kontinu pada $[0,\infty]$ dan $\int_0^{x^2} f(t)dt = x(\cos \pi x - 1)$ tentukan *f*(4).

18. Jika *f* kontinu pada $[4,\infty]$ dan $\mathrm{f(x)} = \int_4^{x^2} \frac{x^2}{1+\sqrt{3+t^2}} dt$, tentukan $f'(2)$

19. Hitung $\lim_{x\to 0} \frac{1}{6x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1} dt$.