5. Aplikasi Turunan

5.1 Menggambar grafik fungsi

Informasi yang dibutuhkan:

A. Titik potong dengan sumbu x dan sumbu y
B. Asimtot fungsi
C. Kemonotonan Fungsi
D. Ekstrim Fungsi
E. Kecekungan Fungsi
F. Titik Belok

A. Titik potong dengan sumbu *x* dan sumbu *y*

B. Asimtot fungsi

Definisi 5.1: Asimtot fungsi adalah garis lurus yang didekati oleh grafik fungsi. Ada Tiga jenis asimtot fungsi, yakni

(i) Asimtot Tegak

Garis $\boldsymbol{x = c}$ disebut asimtot tegak dari $y = f(x)$ jika $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

(ii) Asimtot Datar

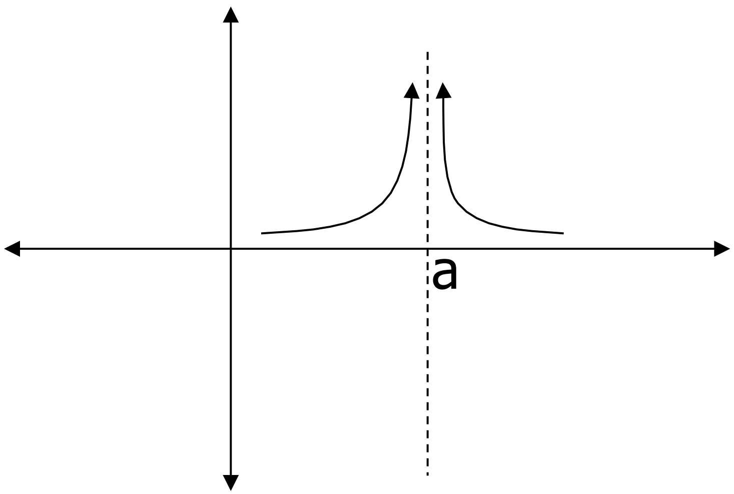
Garis $\boldsymbol{y = b}$ disebut asimtot datar dari $y = f(x)$ jika $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

(iii) Asimtot Miring

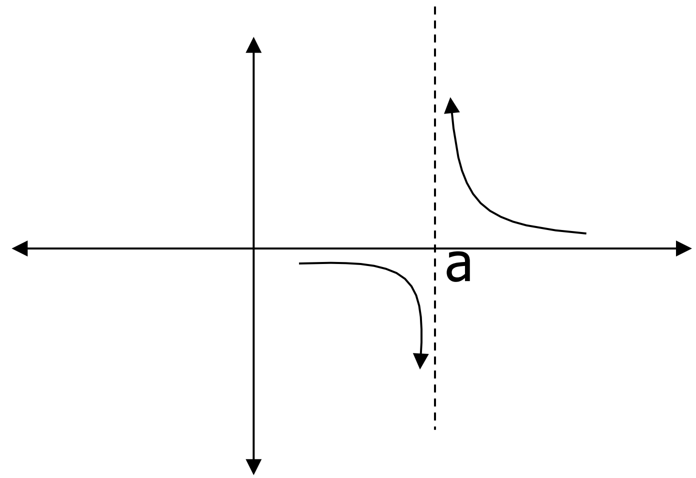
Garis $\boldsymbol{y = ax + b}$ disebut asimtot miring jika

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$$

Asimtot tegak



x=a asimtot tegak



x=a asimtot tegak

Dalam kasus

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

dan

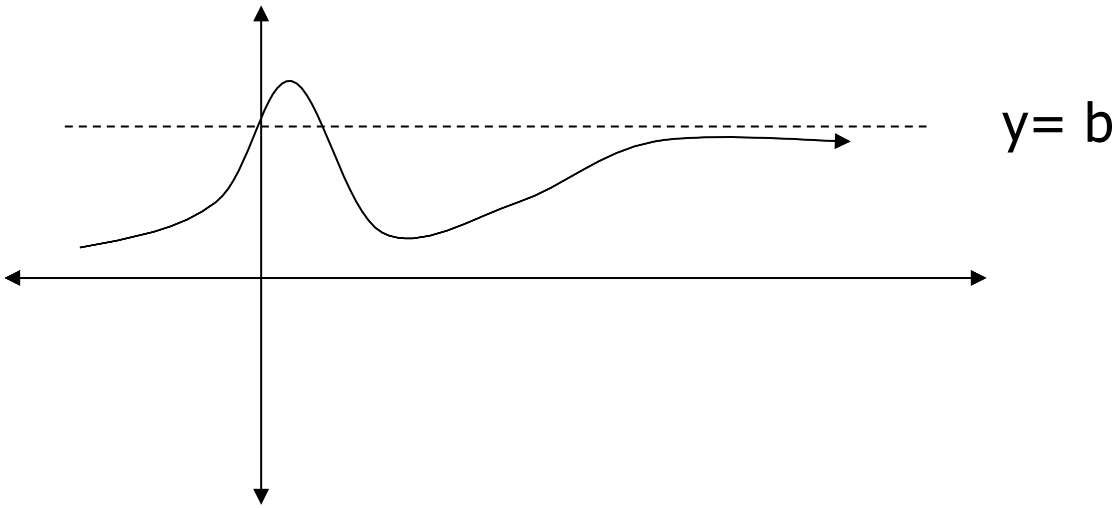
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

Dalam kasus

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

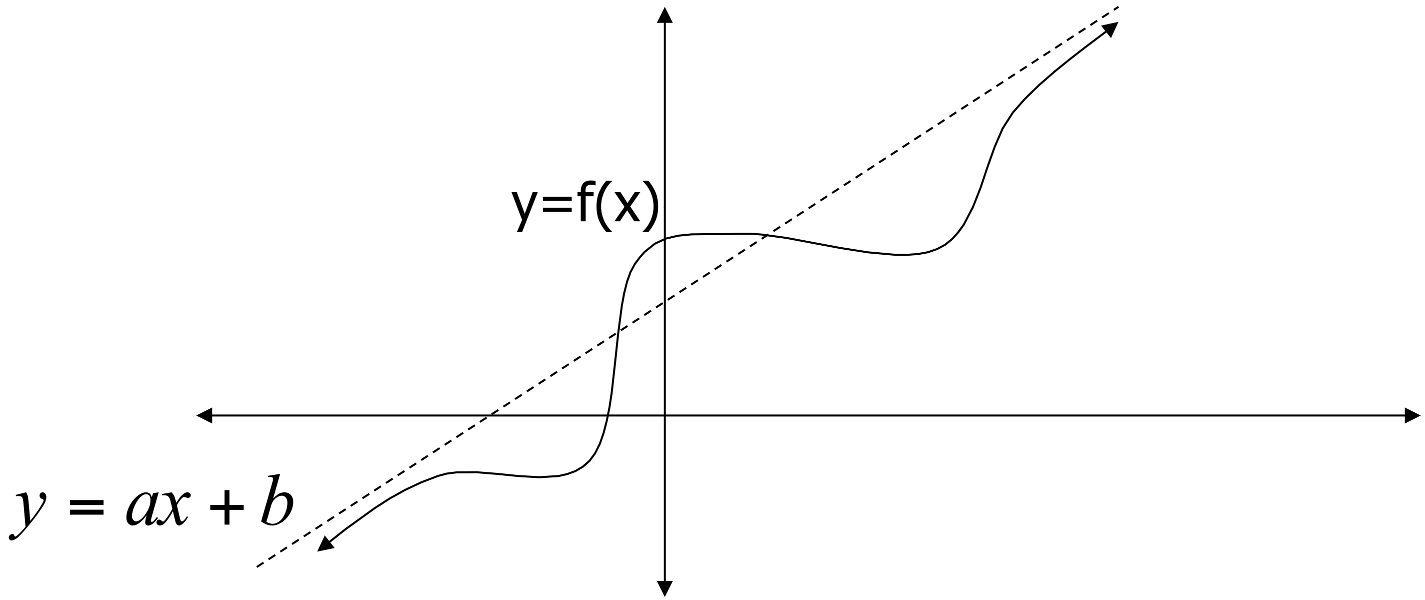
dan

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$



Garis y = b asimtot datar karena $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

Asimtot datar mungkin dipotong oleh grafik fungsi untuk x hingga Tapi, jika untuk x menuju tak hingga asimtot datar dihampiri oleh grafik fungsi(tidak dipotong lagi)



Garis y = ax + b asimtot miring

Asimtot miring bisa dipotong oleh kurva untuk nilai x hingga. Untuk satu fungsi tidak mungkin ada sekaligus asimtot datar dan asimtot miring

Contoh Tentukan semua asimtot dari $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

Jawab :

(i) Asimtot tegak : $x = 2$, karena

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x+4}{x-2}=-\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x+4}{x-2}=\infty$$

(ii) Asimtot datar :

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+4}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})}{x^2(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})}{(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}=\infty$$

Maka asimtot datar tidak ada

(iii) Asimtot miring

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4}{x-2}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4}{x^2-2x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})}{x^2(1-\frac{2}{x})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})}{(1-\frac{2}{x})} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4}{x-2} - x$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4-x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4-x^2+2x}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-2} = 0$$

Asimtot miring $y = x$

Soal Latihan

Tentukan semua asimtot dari fungsi berikut :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x-3}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$

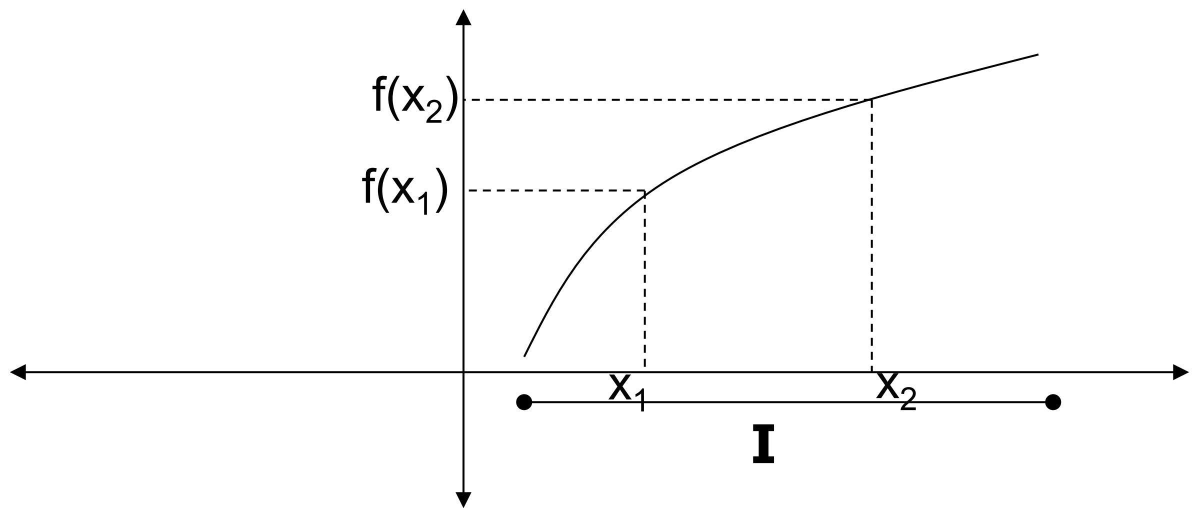
4. $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

5. $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2+1}$

C. Kemonotonan Fungsi

Definisi 5.2 Fungsi *f*(*x*) dikatakan **monoton naik** pada interval I jika untuk

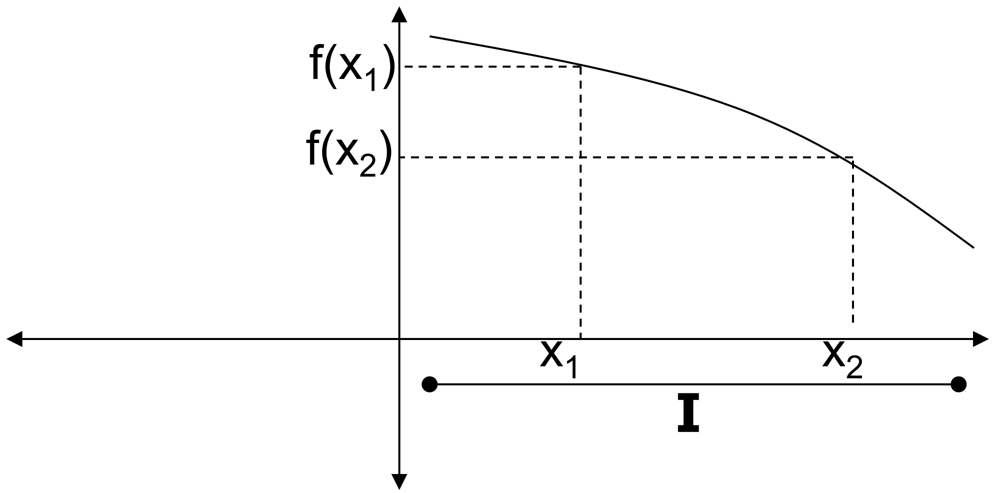
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right), \forall x_1, x_2 \in I$$



Fungsi f(x) monoton naik pada selang I

monoton turun pada interval I jika untuk

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\,,\ \forall\ x_1, x_2 \in I$$



Fungsi f monoton turun pada selang I

Teorema 5.1 : Andaikan f diferensiabel di selang I, maka

- Fungsi $f(x)$ monoton naik pada I jika $f'(x) > 0 \;\forall\, x \in I$
- Fungsi $f(x)$ monoton turun pada I jika $f'(x) < 0 \;\forall\, x \in I$

Contoh Tentukan selang kemonotonan dari $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

Jawab :

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-2) - 1(x^2 - 2x + 4)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 6x + 4 - x^2 + 2x - 4}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

+++++++ ------------ --------- ++++++

0 2 4

$f(x)$ monoton naik pada $(-\infty, 0)$ dan $(4, +\infty)$

$f(x)$ monoton turun pada (0,2) dan (2,4).

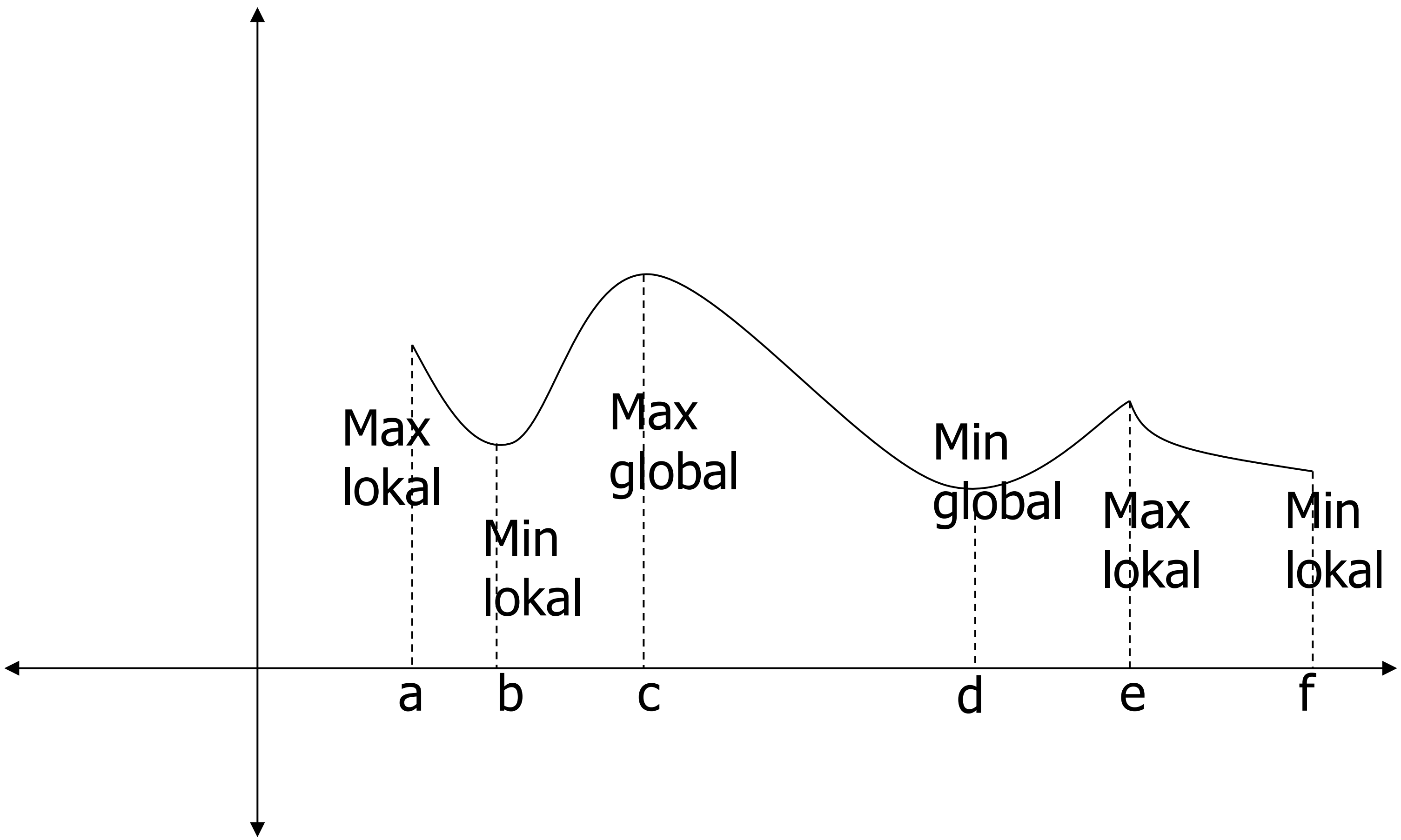
D. Ekstrim Fungsi

Definisi 5.3 Misalkan *f*(*x*) kontinu pada selang I yang memuat *c*,

f(*c*) disebut nilai $\frac{\text{maksimum}}{\text{minimum}}$ global dari *f* pada I jika $\frac{f(c) \geq f(x)}{f(c) \leq f(x)}$ $\forall x \in I$

f(*c*) disebut nilai $\frac{\textit{maksimum}}{\text{min}\,\textit{imum}}$ lokal dari *f* pada I jika terdapat selang buka yang memuat *c* sehingga $\frac{f(c) \geq f(x)}{f(c) \leq f(x)}$ untuk setiap *x* pada selang buka tadi. Nilai maksimum dan minimum fungsi disebut juga nilai ekstrim

Titik pada daerah definisi dimana kemungkinan terjadinya ekstrim fungsi disebut **titik kritis**.



Nilai ekstrim fungsi pada selang I=[a,f]

- Ada tiga jenis titik kritis :

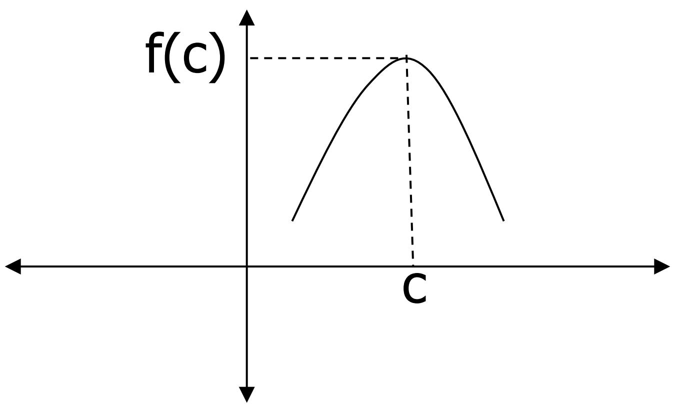
  - Titik ujung selang I

  - Titik stasioner (yaitu $x = c$ dimana $f'(c) = 0$) , secara geometris : garis singgung mendatar dititik $(c,f(c))$

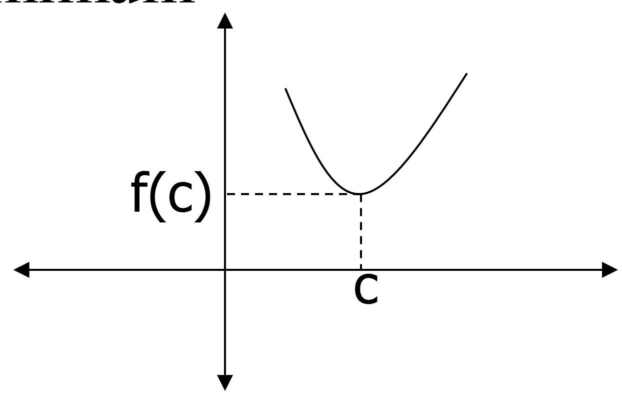
  - Titik singulir ($x = c$ dimana $f'(c)$ tidak ada), secara geometris: terjadi patahan pada grafik f di titik $(c,f(c))$

Teorema 5.3 : Uji turunan pertama untuk ekstrim lokal

Jika $\dfrac{f'(x) > 0}{f'(x) < 0}$ pada $(c-\delta, c)$ dan $\dfrac{f'(x) < 0}{f'(x) > 0}$ pada $(c, c+\delta)$ Maka f(c) merupakan nilai $\dfrac{\text{maksimum}}{\text{minimum}}$ lokal



f(c) nilai maks lokal



f(c) nilai min lokal

Disebelah kiri c monoton naik (f ’>0) dan disebelah kanan c monoton turun (f’<0)

Disebelah kiri c monoton turun (f ’<0) dan disebelah kanan c monoton naik (f’>0)

Teorema 5.4 Uji turunan kedua untuk ekstrim lokal

Misalkan $f'(c)=0$. Jika $\dfrac{f''(c)<0}{f''(c)>0}$,maka *f*(*c*) merupakan nilai $\dfrac{\text{maksimum}}{\text{minimum}}$ lokal *f*

Contoh :Tentukan nilai ekstrim dari $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

Jawab: $f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

+++++++ ------------ --------- ++++++

0 2 4

Dengan menggunakan uji turunan pertama :

di x = 0 tercapai maksimum lokal dengan nilai $f(0)=-2$

di x = 4 tercapai minimum lokal dengan nilai $f(4)=6$

Soal Latihan

Tentukan selang kemonotonan dan ektrim fungsi berikut :

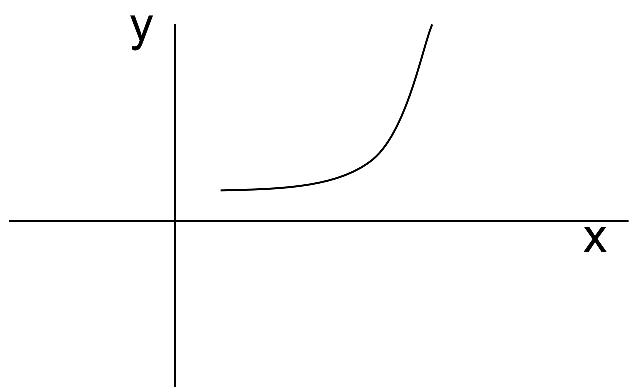
1. $f(x) = 2x^5 - 15x^4 + 30x^3 - 6$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

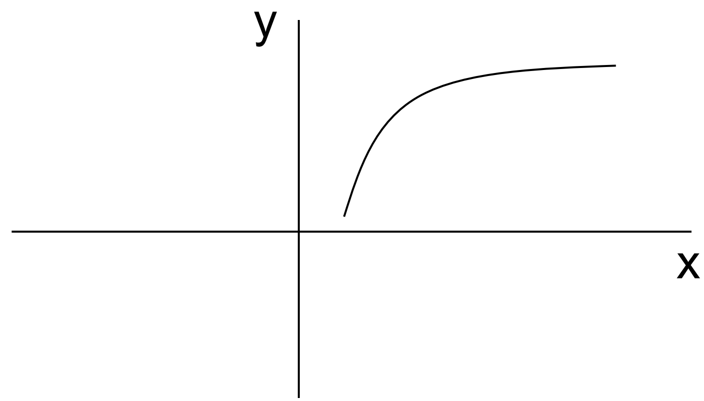
3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

4. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$

E. Kecekungan Fungsi



Grafik fungsi cekung keatas



Grafik fungsi cekung kebawah

Fungsi $f(x)$ dikatakan **cekung ke atas** pada interval I bila $f'(x)$ naik pada interval I, dan f(x) dikatakan **cekung kebawah** pada interval I bila $f'(x)$ turun pada interval I.

Teorema 5.6 Uji turunan kedua untuk kecekungan

1. Jika $f''(x) > 0, \forall x \in I$, maka *f* cekung ke atas pada I.
2. Jika $f''(x) < 0, \forall x \in I$, maka *f* cekung ke bawah pada I.

contoh Tentukan selang kecekungan dari $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

Jawab :

$$f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4}$$

$$=\frac{(x-2)((2x-4)(x-2)-2(x^2-4x))}{(x-2)^4}$$

$$=\frac{2x^2-8x+8-2x^2+8x}{(x-2)^3}=\frac{8}{(x-2)^3}$$

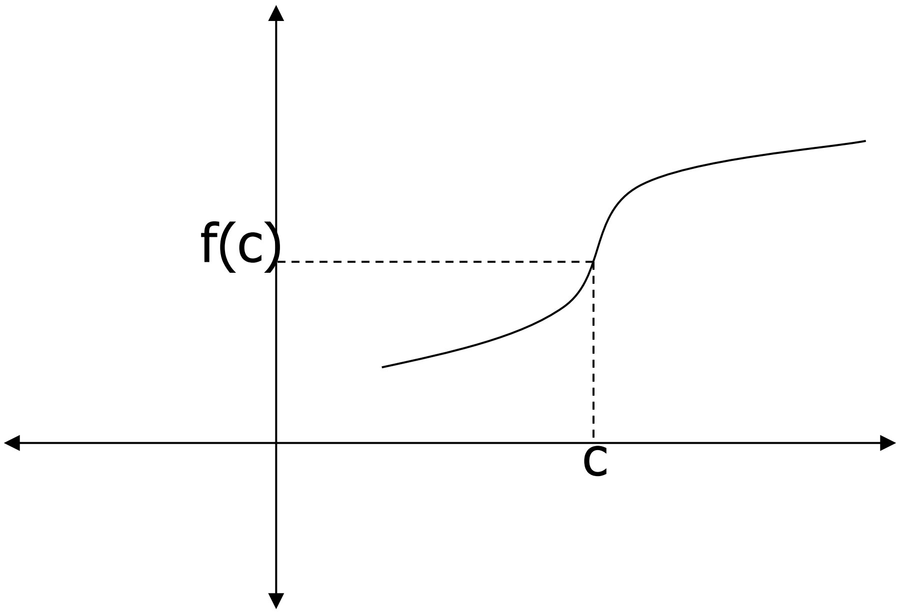
Grafik f cekung keatas pada $(2,\infty)$ dan cekung kebawah pada selang $(-\infty,2)$

F. Titik belok

- **Definisi 5.4** Misal $f(x)$ kontinu di $x = b$. Maka $(b,f(b))$ disebut **titik belok** dari kurva $f(x)$ jika :

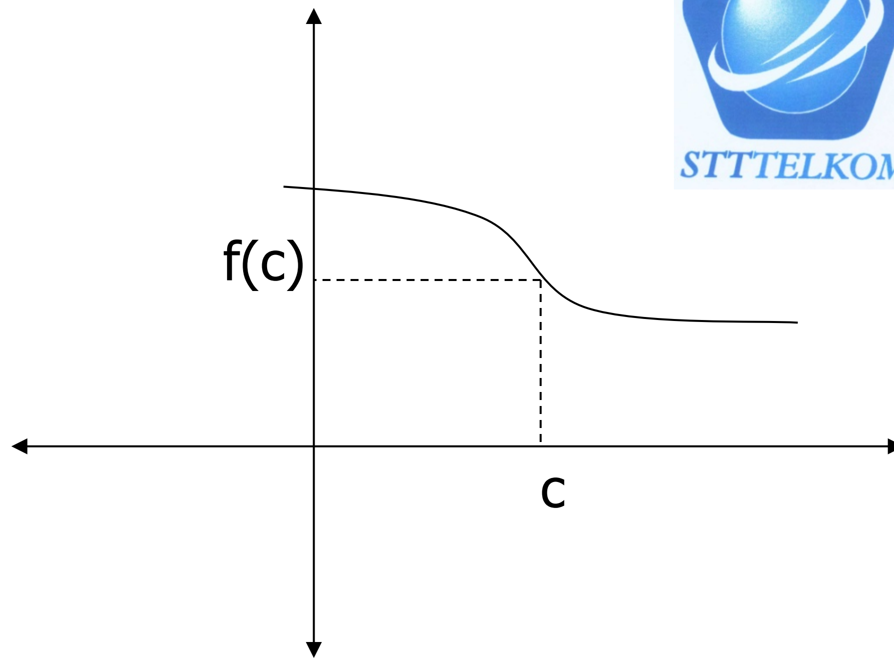
  terjadi perubahan kecekungan di $x = b$, yaitu di sebelah kiri $x = b$, fungsi f cekung ke atas dan di sebelah kanan $x = b$ fungsi f cekung ke bawah atau sebaliknya

$x = b$ adalah absis titik belok, jika $f''(b) = 0$ atau $f''(b)$ tidak ada.



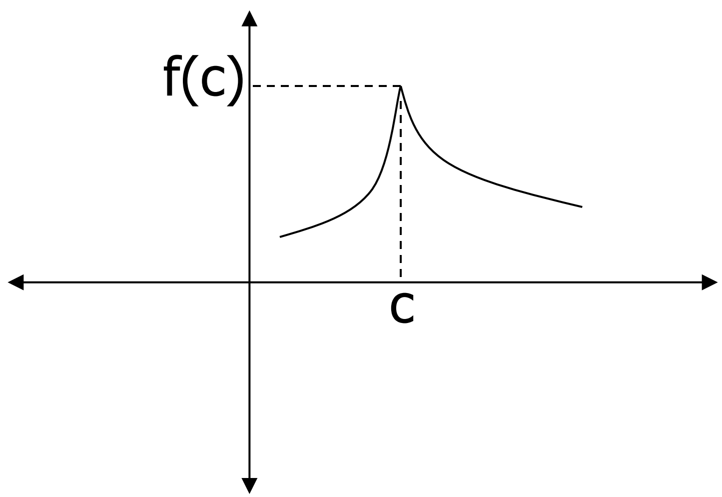
(c,f(c)) titik belok

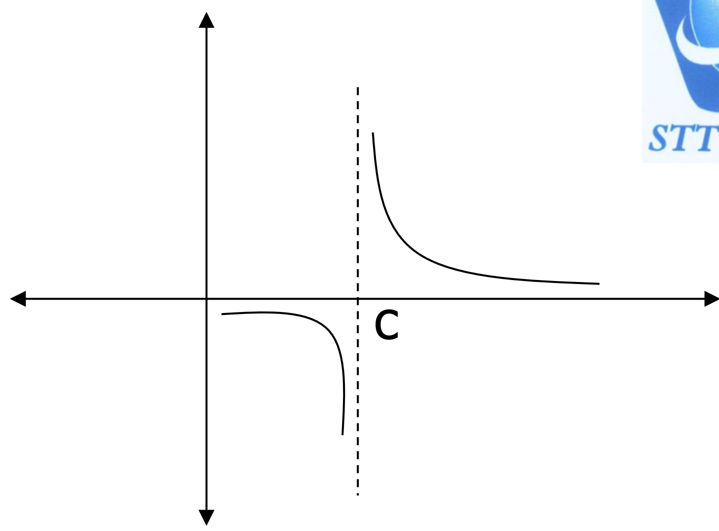
Karena disebelah kiri c cekung keatas dan disebelah kanan c cekung kebawah



(c,f(c)) titik belok

Karena disebelah kiri c cekung kebawah dan disebelah kanan c cekung keatas





(c,f(c)) bukan titik belok karena disekitar c tidak terjadi perubahan kecekungan

Walaupun di sekitar c terjadi perubahan kecekungan tapi tidak ada titik belok karena f tidak terdefinisi di c

Tentukan titik belok (jika ada) dari

1. $f(x) = 2x^3 - 1$

$$f'(x) = 6x^2 \;,\; f''(x) = 12x$$

------------- +++++++

0

Di x = 0 terjadi perubahan kecekungan, dan f(0)= -1 maka (0,-1) merupakan titik belok

2. $f(x) = x^4$

$$f''(x) = 12x^2$$

+++++++ +++++++

0

Tidak ada titik belok, karena tidak terjadi perubahan kecekungan

3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

$$f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$$

-------------- +++++++

2

Walaupun di x = 2, terjadi perubahan kecekungan, tidak ada titik belok karena fungsi f(x) tidak terdefinisi di x = 2

Soal Latihan

Tentukan selang kecekungan dan titik belok fungsi berikut :

1. $f(x) = 2x^5 - 15x^4 + 30x^3 - 6$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

4. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$

5. $f(x) = x^{1/3}$

Contoh: Diketahui $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

a. Tentukan selang kemonotonan dan ekstrim fungsi
b. Tentukan selang kecekungan dan titik belok
c. Tentukan semua asimtot
d. Gambarkan grafik f(x)

a. Fungsi f(x) monoton naik pada selang $(-\infty, 0)$, $(4, +\infty)$
monoton turun pada selang (0,2) dan (2,4).
di x = 0 tercapai maksimum lokal dengan nilai $f(0) = -2$
di x = 4 tercapai minimum lokal dengan nilai $f(4) = 6$

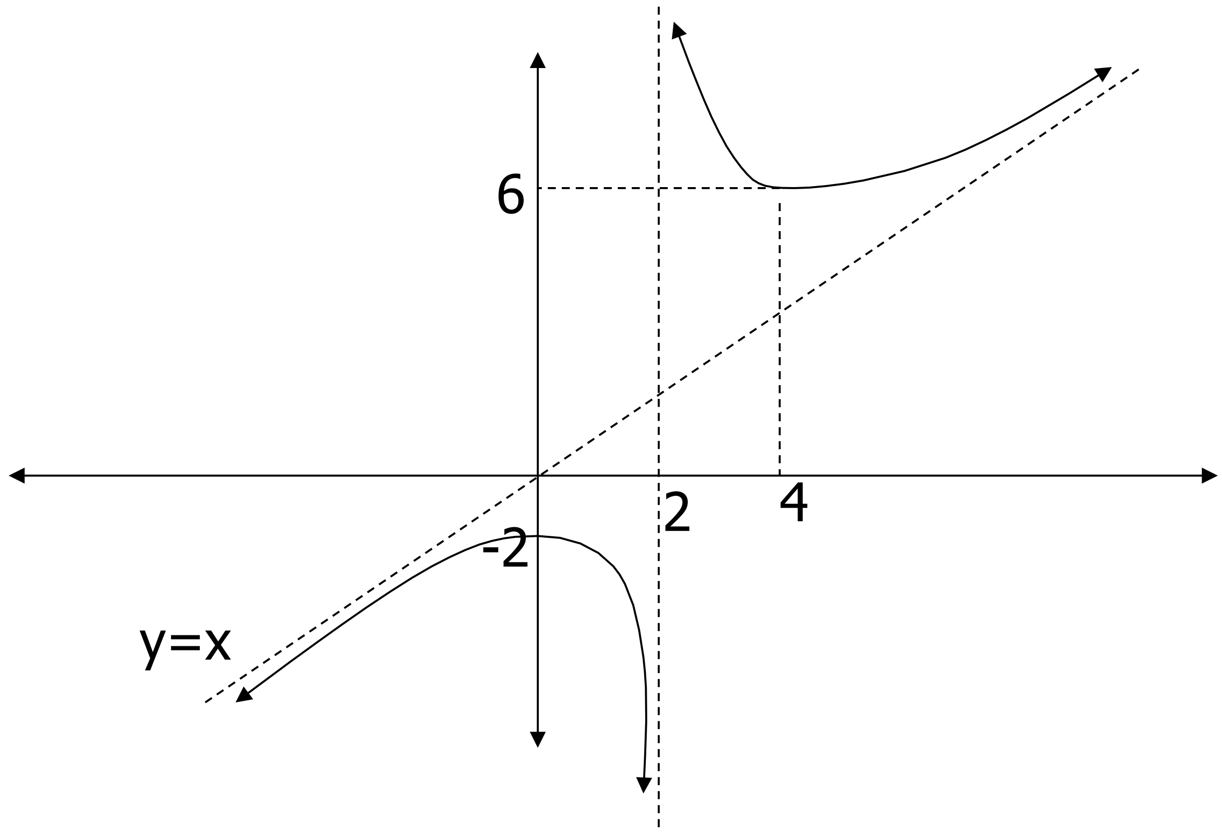
b. Grafik f cekung keatas pada $(2, \infty)$ dan cekung kebawah pada selang $(-\infty, 2)$, tidak ada titik belok

c. Asimtot tegak x = 2, asimtot miring y = x, tidak ada asimtot datar

d. Grafik f(x)

$$\begin{array}{lcccc} f' & ++++++ & ----- & ----- & ++++++ \\ & 0 & 2 & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcc} f'' & -------------------- & ++++++++++++ \\ & 2 & \end{array}$$



Soal Latihan

A. Gambarkan grafik fungsi berikut dengan mencari terlebih dahulu selang kemonotonan,ekstrim fungsi, kecekungan, titik belok, dan asimtot

1. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

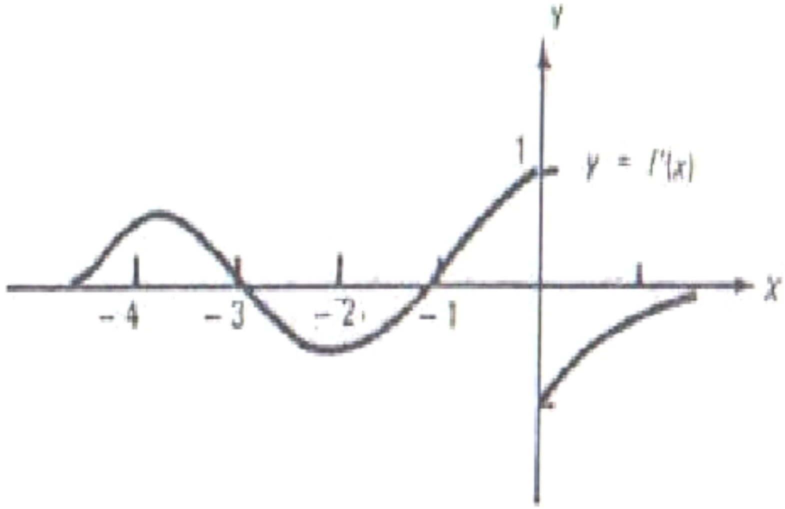
3. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1$

4. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

5. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

B. Misalkan *f* suatu fungsi kontinu dan f(-3)=f(0)=2. Jika grafik

$y = f'(x)$ seperti gambar berikut :



a. Tentukan selang kemonotonan fungsi *f*
b. Tentukan selang kecekungan fungsi *f*
c. Sketsa grafik fungsi *f*(*x*).

5.2 Menghitung limit fungsi dengan Aturan L'Hôpital

Bentuk tak tentu dalam limit : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty$

1. **Aturan L'Hôpital untuk bentuk** $\frac{0}{0}$

Andaikan lim *f*(*x*) = lim *g*(*x*) = 0. Jika $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, +\infty, \text{ atau } -\infty$

Maka

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Contoh Hitung $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ bentuk (0/0)

Jawab

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x}{2}=2$$

Ctt : aturan L'hopital bisa digunakan beberapa kali asalkan syaratnya dipenuhi

2. **Aturan L' Hôpital untuk bentuk** $\frac{\infty}{\infty}$

Andaikan lim $f(x)$ = lim $g(x)$ = ∞. Jika $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=L,+\infty,\text{ atau }-\infty$

maka $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Contoh Hitung $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+3x+5}$ (bentuk $\frac{\infty}{\infty}$)

Jawab

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2+3x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1$$

Ctt: walaupun syarat di penuhi, belum tentu limit dapat dihitung dengan menggunakan dalil L'Hopital

Contoh Hitung $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Jawab

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}(2x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}(2x+2)}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

Soal seperti diatas tidak bisa diselesaikan dengan menggunakan aturan L'Hopital, karena setelah dilakukan aturan L'Hopital muncul lagi bentuk semula

Soal seperti diatas diselesaikan dengan cara sbb

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}} = 1$$

3. **Bentuk 0 . ∞**

Untuk menyelesaikannya rubah kedalam bentuk

$\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$

Contoh : Hitung $\lim_{x\to 0} x^2 \csc x$

Jawab :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \csc x = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\cos x} = 0$$

4. Bentuk ∞ - ∞

Misalkan lim $f(x)$=lim $g(x)$ = ∞. Untuk menghitung lim [$f(x)$ - $g(x)$] dilakukan dengan menyederhanakan bentuk [$f(x)$- $g(x)$] sehingga dapat dikerjakan menggunakan cara yang telah dikenal sebelumnya

Contoh : Hitung $\lim\limits_{x\to 0}\left(\csc x - \cot x\right)$

Jawab :

$$\lim_{x\to 0}\left(\csc x - \cot x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

Soal Latihan

Hitung limit berikut (bila ada)

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$

3. $\lim\limits_{x \to 0} 2x \csc x$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{2 - 5x}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \cot 2x \left(1 - \cos 2x \right)$

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 - 3} \right)$

5.3 Masalah maksimum minimum lainnya

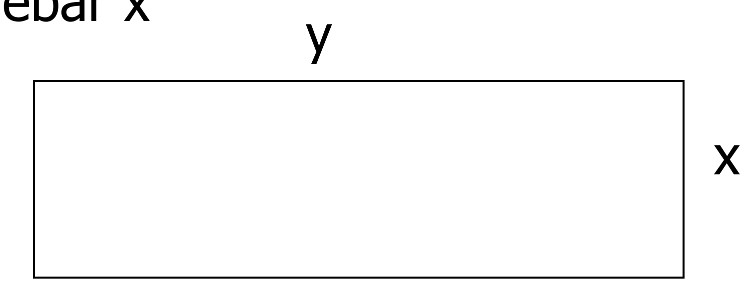
Turunan dapat juga dipergunakan dalam menyelesaikan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan masalah memaksimumkan/ meminimumkan fungsi. Langkah pertama yang harus dilakukan adalah memodelkan masalah tersebut menjadi fungsi satu peubah. **Setelah itu gunakan aturan-aturan turunan untuk menentukan nilai maksimum atau nilai minimum**

Contoh:

1. Tentukan ukuran persegi panjang yang dapat dibuat dari kawat sepanjang 100 cm agar luasnya maksimum

jawab

Misal panjang y, lebar x



Luas= L = x y, karena 2x + 2y = 100 → y = 50 - x

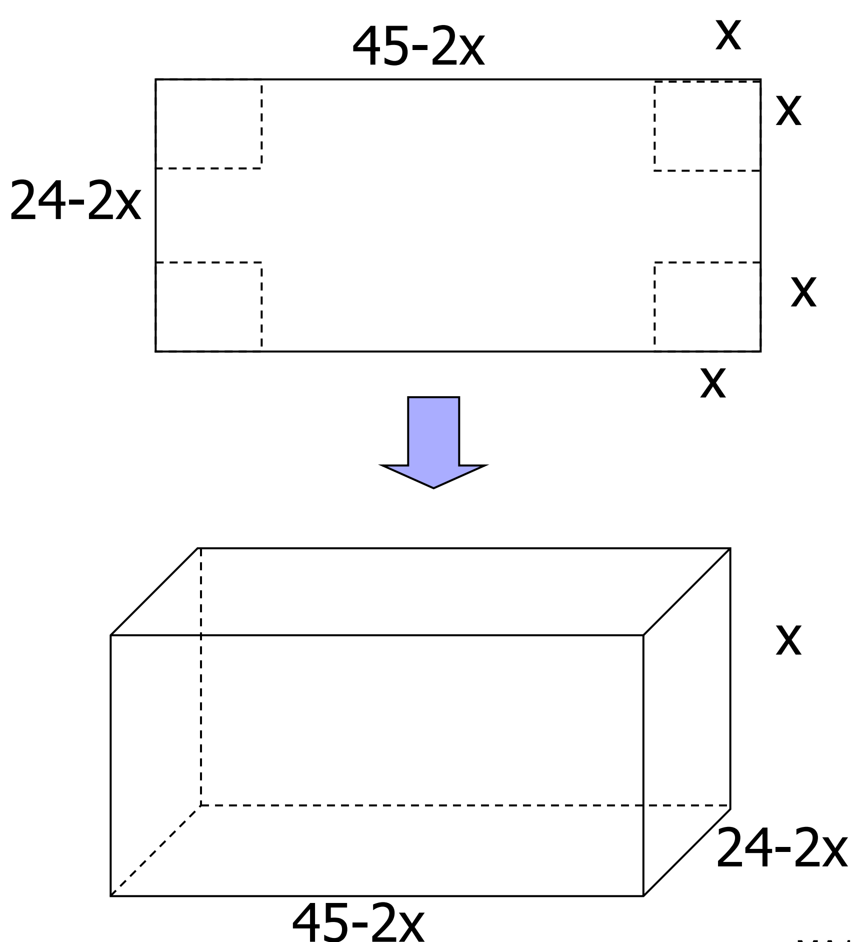
Sehingga Luas = L(x) = x(50-x) = $50x - x^2,\ 0 \le x \le 50$

$L'(x) = 50 - 2x$ → x = 25

Karena $L''(25) = -2 < 0$ maka di x = 25 terjadi maks lokal.

Karena L(0) = 0, L(25) = 625, L(50) = 0 → agar luas maks haruslah x = 25 dan y = 25

2. Sehelai karton berbentuk persegipanjang dengan ukuran 45 x 24 cm. Karton ini akan dibuat kotak tanpa tutup dengan cara memotong keempat pojoknya berupa bujur sangkar dan melipatnya. Tentukan ukuran kotak agar volume kotak maksimum.



Misal, panjang sisi potongan di pojok persegi panjang x, sehingga

V(x) = (45-2x) (24-2x) x

$$V(x) = 4x^3 - 138x^2 + 1080x,\ 0 \le x \le 12$$

$$V'(x) = 12(x^2 - 23x + 90)$$

$$= 12(x-18)(x-5)$$

Sehingga diperoleh titik stasioner x = 18 dan x = 5

$$V''(x) = 24x - 276$$

Sehingga

$V''(18) = 156 > 0 \longrightarrow$ di x =18 terjadi min lokal

$V''(5) = -156 < 0 \longrightarrow$ di x = 5 terjadi maks lokal

Untuk menentukan volume maksimum bandingkan nilai Volume jika x = 5 dan x = 0, x = 12 (batas Df)

V(0) = 0

V(12)= 0

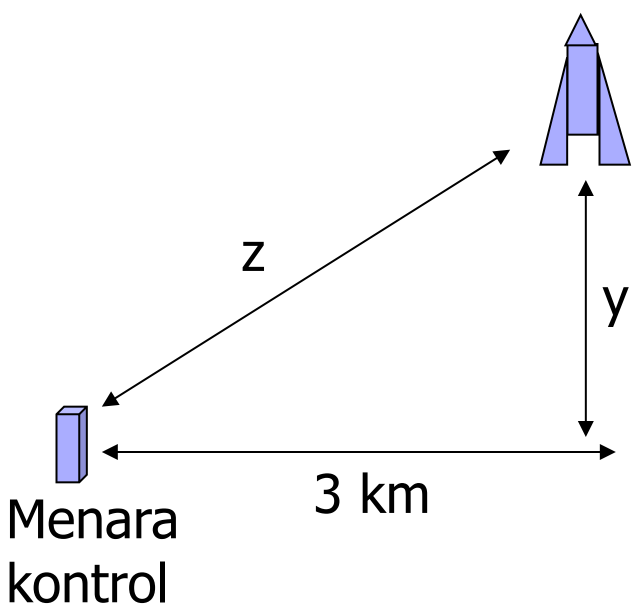
V(5) =2450

Agar volume kotak maksimum maka ukuran kotak : panjang 35 cm lebar 14 cm tinggi 5 cm

Bisa saja masalah yang dihadapi harus dimodelkan kedalam bentuk fungsi implisit, seperti contoh berikut

Contoh

Sebuah roket yang diluncurkan vertikal diamati dari menara kontrol yang berjarak 3 km dari tempat peluncuran. Tentukan kecepatan vertikal roket pada saat jaraknya dari menara kontrol 5 km dan dan jarak ini bertambah dengan kecepatan 5000 km/jam



Misal ketinggian roket y dan jarak dari menara z

Diketahui

$$\frac{dz}{dt} = 5000 \quad \text{Saat } z = 5$$

Dengan menggunakan dalil pythgoras diperoleh

$$y^2 + 9 = z^2$$

Pada saat z = 5 → y = 4

Dengan menggunakan turunan fungsi implisit didapatkan

$$2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$$

Jika data y = 4, z = 5, dan $\frac{dz}{dt} = 5000$ disubstitusikan diperoleh

Kecepatan vertikal roket = $\frac{dy}{dt} = \frac{5}{4}.5000 = 6250$ km/jam

Soal Latihan

1. Tentukan dua buah bilangan yang selisihya 100 dan hasil kalinya minimum

2. Tentukan ukuran persegi panjang dengan luas 1000 cm^2 dan kelilingnya minimum

3. Tentukan titik pada garis 6x + y = 9 yang terdekat ke titik (-3,1)

4. Tentukan ukuran persegi panjang yang memiliki luas terbesar dengan alas pada sumbu *x* serta dua titik sudutnya di atas sumbu *x* serta terletak pada parabola $y = 8 - x^2$

5. Tentukan ukuran segitiga samakaki yang memiliki luas terbesar sehingga dapat diletakkan dalam lingkaran berjari-jari *r*

6. Kota *A* terletak 3 km dari garis pantai yang lurus dan kota *B* terletak 4 km dari titik di pantai yang terdekat dari *A*. Pemerintah Daerah setempat akan memasang kabel telepon dari kota *A* ke kota *B*. Jika biaya pemasangan kabel dari *A* ke *B* untuk setiap kilometer melewati jalan laut dua kali besarnya dibandingkan biaya pasang kabel lewat darat. Tentukan letak titik di pantai agar biaya pemasangan kabel telepon dari *A* ke *B* semurah mungkin.