4. TURUNAN

4.1 Konsep Turunan

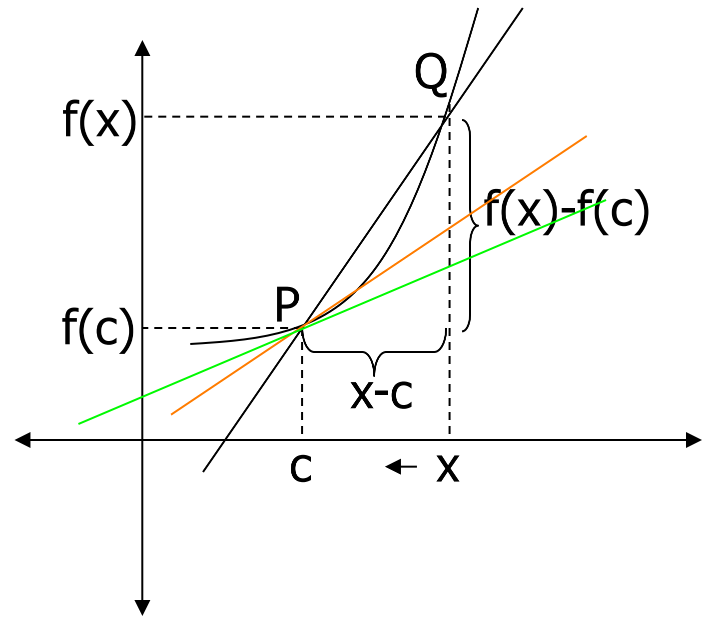
4.1.1 Turunan di satu titik

Pendahuluan (dua masalah dalam satu tema)

a. Garis Singgung

Kemiringan tali busur *PQ* adalah :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$



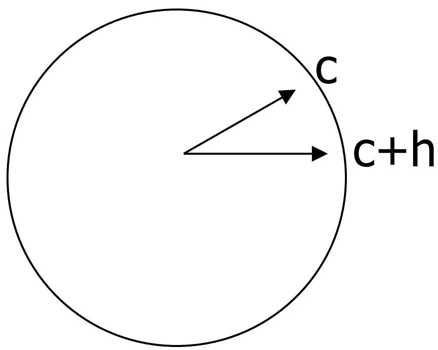
Jika $x \to c$, maka tali busur *PQ* akan berubah menjadi garis singgung di ttk *P* dgn kemiringan

$$m = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

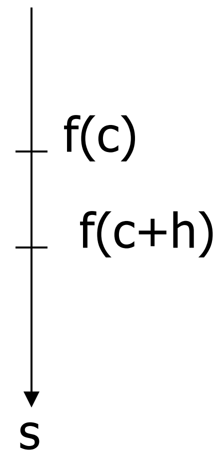
- **b. Kecepatan Sesaat**

  Misal sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisinya setiap saat diberikan oleh $s = f(t)$. Pada saat $t = c$ benda berada di $f(c)$ dan saat $t = c + h$ benda berada di $f(c+h)$.

Perubahan waktu



Perubahan posisi



- Sehingga kecepatan rata-rata pada selang waktu $[c, c+h]$ adalah

$$v_{rata-rata} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Jika h → 0, diperoleh kecepatan sesaat di $x = c$:

$$v = \lim_{h \to 0} v_{rata-rata} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Misal x = c + h, bentuk diatas dapat dituliskan dalam bentuk

$$v = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Dari dua bentuk diatas : kemiringan garis singgung dan kecepatan sesaat terlihat bahwa dua masalah tersebut berada dalam satu tema, yaitu **turunan**

Definisi 4.1 : Turunan pertama fungsi f di titik $x = c$, notasi $f'(c)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit diatas ada

Notasi lain :

$$\frac{df(c)}{dx}, y'(c)$$

Contoh : Diketahui $f(x) = \frac{1}{x}$ tentukan $f'(3)$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{3-x}{3x(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-1}{3x} = -\frac{1}{9}$$

4.1.2 Turunan Sepihak

Turunan kiri dari fungsi *f* di titik *c*, didefinisikan sebagai :

$$f'_{-}(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Turunan kanan dari fungsi *f* di titik *c*, didefinisikan sebagai :

$$f'_{+}(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit ini ada.

Fungsi *f* dikatakan mempunyai turunan(diferensiabel) di *c* atau $f'(c)$ ada, jika

$$f'_{-}(c) = f'_{+}(c) \quad \text{dan} \quad f'(c) = f'_{-}(c) = f'_{+}(c)$$

sebaliknya *f* dikatakan tidak mempunyai turunan di *c*.

Contoh : Diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & , x < 1 \\ 1 + 2\sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$

Selidiki apakah $f(x)$ diferensiabel di $x=1$
Jika ya, tentukan $f'(1)$

Jawab :

a. $$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x + 3 - (1 + 2\sqrt{1})}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1$$

b. $$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1 + 2\sqrt{x} - (1 + 2\sqrt{1})}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x-1} = 2 \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = 1$$

Jadi, f diferensiabel di $x=1$. dan $f'(1) = 1.$

- **Teorema 4.1** Jika *f* diferensiabel di *c* ➔ *f* kontinu di *c*.
- **Bukti :** Yang perlu ditunjukkan adalah

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

- Perhatikan bahwa $f(x) = f(c) + \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}.(x - c) \quad , \quad x \neq c$

- Maka

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c}\left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c)\right]$$

$$= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.\lim_{x \to c}(x - c)$$

$$= f(c) + f'(c).0 \qquad = f(c).$$ Terbukti.

- Sifat tersebut tidak berlaku sebaliknya. Artinya, Jika *f* kontinu di *c*, maka belum tentu *f* diferensiabel di *c*. Hal ini, ditunjukkan oleh contoh berikut.

Contoh Tunjukkan bahwa $f(x) = |x|$ kontinu di $x = 0$ tetapi tidak diferensiabel di $x = 0$

Jawab

Akan ditunjukkan bahwa f(x)=|x| kontinu di x=0

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

- f(0) = 0
- $$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$
- $$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

f kontinu di x=0

Selidiki apakah f terdiferensialkan di x=0

$$f_-'(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f_+'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Karena $-1 = f_-'(0) \neq f_+'(0) = 1$

maka *f* tidak diferensiabel di 0.

4.2 Aturan Pencarian Turunan

- Fungsi Turunan Pertama

- **Definisi 4.2** Misalkan *f* (*x*) terdefinisi pada selang *I*. Fungsi turunan pertama dari *f*, ditulis $f'(x)$ didefinisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad , \ \forall x \in \mathrm{I}$$

- atau jika *h*=*t*-*x*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ , \ \forall x \in \mathrm{I}$$

bila limitnya ada.

- Notasi lain $y', \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df(x)}{dx}, D_x y, D_x f(x)$, bentuk $\dfrac{dy}{dx}$ dikenal

sebagai notasi **Leibniz.**

Dengan menggunakan definisi tersebut dapat diturunkan **aturan untuk mencari turunan** sebagai berikut :

1. Jika $f(x)$=k, maka $f'(x) = 0$

2. $\dfrac{d\left(x^r\right)}{dx} = r x^{r-1}\ ;\ r \in R$

3. $\dfrac{d\left(f(x)+g(x)\right)}{dx} = f'(x) + g'(x)$

4. $\dfrac{d\left(f(x)g(x)\right)}{dx} = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x)$

5. $\dfrac{d\left(f(x)/g(x)\right)}{dx} = \dfrac{f'(x)\ g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$ dengan $g(x) \neq 0$.

Bukti aturan ke-4

Misal h(x) = f(x)g(x)

$$h'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h} \qquad = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0} g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

$$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Contoh

1. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$

   Jawab :

   $$f'(x) = 3x^2 + 3.2x + 0 = 3x^2 + 6x$$

2. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = (x^3 + 1)(x^2 + 2x + 3)$

   Jawab :

   $$f'(x) = 3x^2(x^2 + 2x + 3) + (x^3 + 1)(2x + 2)$$

   $$= 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 2x^4 + 2x^3 + 2x + 2$$

   $$= 5x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 2x + 2$$

3. Tentukan turunan pertama dari $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$

   Jawab :

   $$f'(x) = \frac{1.(x^2+1) - 2x(x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 6x - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 6x + 1}{(x^2+1)^2}.$$

Soal Latihan

Tentukan fungsi turunan pertama dari

1. $f(x) = x^{1/2} + \sqrt[3]{x^2} + 1$

2. $f(x) = (x+1)(x^3 + 2x + 1)$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

4.3 Turunan Fungsi Sinus dan Cosinus

$$a.\ f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$b.\ f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

Bukti:

a. Misal f(x) = sin x maka

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{\sin t - \sin x}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{2\cos\left(\frac{t+x}{2}\right)\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{t - x}$$

$$= \lim_{t \to x} \cos\left(\frac{t+x}{2}\right) . \lim_{\frac{t-x}{2} \to 0} \frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\left(\frac{t-x}{2}\right)}$$

$$= \cos x . 1 = \cos x.$$

b. Misal f(x) = cos x maka

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \quad =\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\ \cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h} \quad =\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(-\sin^2\frac{h}{2})}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\ (-\sin^2\frac{h}{2})h}{(h/2)^2 4}-\sin x\frac{\sin h}{h}\right) \quad =\cos x\lim_{(h/2)\to 0}-\left(\frac{\sin(h/2)}{h/2}\right)^2\frac{h}{4}-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$=\cos x.0-\sin x=-\sin x$$

Untuk turunan fungsi trigonometri yang lain dapat diperoleh dengan menerapkan rumus perhitungan turunan, khususnya turunan bentuk u/v

$$c.\ \frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$d.\ \frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{dx} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$e.\ \frac{d(\sec x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}\,\frac{1}{\cos x} = \tan x\ \sec x$$

$$f.\ \frac{d(\csc x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\sin x}\right)}{dx} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x}\,\frac{1}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

4.4 Aturan Rantai

- Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika $\frac{dy}{du}$ dan $\frac{du}{dx}$ ada , maka

  $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

  Contoh : Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \sin(x^2 + 1)$

  Jawab :

  Misal $u = x^2 + 1$ sehingga bentuk diatas menjadi $y = \sin u$

  Karena

  $$\frac{dy}{du} = \cos u \text{ dan } \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

  maka

  $$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2 + 1)\, 2x = 2x\cos(x^2 + 1)$$

Jika y = f(u), u = g(v), v = h(x), dan $\frac{dy}{du}, \frac{du}{dv}, \frac{dv}{dx}$ Ada, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Contoh : Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = Sin^4(x^3 + 5)$

Jawab :

Misal $v = x^3 + 5 \longrightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2$

$u = Sin\ v \longrightarrow \frac{du}{dv} = \cos v = \cos(x^3 + 5)$

$y = u^4 \longrightarrow \frac{dy}{du} = 4u^3 = 4Sin^3(x^3 + 5)$

sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx} = 12x^2\, Sin^3(x^3 + 5)\, Cos(x^3 + 5)$$

- Contoh : Tentukan $f'(x^2)$ $jika$ $\dfrac{d}{dx}(f(x^2)) = x^2 + 1$

jawab :

$$\frac{d}{dx}(f(x^2)) = x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x^2).2x = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{x^2+1}{2x}$$

Soal Latihan

Tentukan fungsi turunan pertama dari

1. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

2. $y = (2x - 3)^{10}$

3. $y = \sin^3 x$

4. $y = \cos^4\left(4x^2 - x\right)$

5. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

6. $y = \sin x \ \tan [\, x^2 + 1 \,]$

4.5 Turunan Tingkat Tinggi

- Turunan ke-*n* didapatkan dari penurunan turunan ke-(*n*-1).

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right)$$

- Turunan pertama $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$
- Turunan kedua $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$
- Turunan ketiga $f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$
- Turunan ke-n $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$
- **Contoh** : Tentukan y'' dari $y = 4x^3 + \sin x$
- **Jawab** :

$$y' = 12x^2 + \cos x \quad maka \;\; y'' = 24x - sin\, x$$

Soal Latihan

A. Tentukan turunan kedua dari

1. $y = \sin(2x-1)$

2. $y = (2x-3)^4$

3. $y = \dfrac{x}{x+1}$

4. $y = \cos^2(\pi x)$

B. Tentukan nilai *c* sehingga $f''(c) = 0$ bila $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$

C. Tentukan nilai *a, b* dan *c* dari $g(x) = ax^2 + bx + c$ bila *g* (1) = 5, $g'(1) = 3$ dan $g''(1) = -4$

4.6 Turunan Fungsi Implisit

- Jika hubungan antara *y* dan *x* dapat dituliskan dalam bentuk *y* = *f*(*x*) maka y disebut **fungsi eksplisit** dari x, yaitu antara peubah bebas dan tak bebasnya dituliskan dalam ruas yang berbeda. Bila tidak demikian maka dikatakan ***y* fungsi implisit dari *x***.

  Contoh :

  $$1.\ x^3y^2 + x^2 + y = 10$$

  $$2.\ \sin(xy) + x^2 = y^2 + 1$$

- Untuk menentukan turunan dari bentuk implisit digunakan aturan rantai dan anggap *y* fungsi dari *x*.

Tentukan dy/dx dari bentuk implisit berikut

1. $x^3y^2 + x^2 + y = 10$ 2. $\sin(xy) + x^2 = y^2 + 1$

Jawab

1. $D_x(x^3y^2 + x^2 + y) = D_x(10)$

$$D_x(x^3y^2) + D_x(x^2) + D_x(y) = D_x(10)$$

$$(3x^2y^2 + 2x^3y\,y') + 2x + y' = 0$$

$$(2x^3y + 1)y' = -2x - 3x^2y^2$$

$$y' = \frac{-2x - 3x^2y^2}{2x^3y + 1}$$

2. $D_x(\sin(xy) + x^2) = D_x(y^2 + 1)$

$$\cos(xy)(y + xy') + 2x = 2yy' + 0$$

$$(x\cos(xy) - 2y)y' = -2x - y\cos(xy)$$

$$y' = \frac{-2x - y\cos(xy)}{x\cos(xy) - 2y}$$

Soal Latihan

Tentukan turunan pertama (y') dari bentuk implisit

1. $x^3 - 3x^2y + y^2 = 0$
2. $y + \sin(xy) = 1$
3. $\tan(xy) - 2y = 0$
4. $x^2 \sin(xy) + y = x$

4.7 Garis singgung dan garis normal

- Persamaan garis singgung fungsi $y = f(x)$ di titik (x_0,y_0) dengan kemiringan m adalah

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

- Garis yang tegak lurus dengan garis singgung disebut dengan garis normal.
- Persamaan garis normal di titik (x_0,y_0) adalah

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

Contoh: Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal fungsi $y = x^3 - 2x^2 + 6$ di (2,6).

Jawab :

$$y' = 3x^2 - 4x \;\rightarrow\; y'(2,6) = 3.2^2 - 4.2 = 4$$

Sehingga persamaan garis singgung di titik (2,6) :

$$y - 6 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 2$$

Persamaan garis normal dititik (2,6) :

$$y - 6 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y - 6 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{2}.$$

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva

$x^2 y^2 - xy - 6 = 0$ di titik dengan absis(x) = 1

Jawab :

Jika disubstitusikan nilai x = 1 pada persamaan kurva diperoleh

$$y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y+2) = 0 \qquad y = 3 \text{ dan } y = -2$$

Sehingga diperoleh titik dimana akan ditentukan persamaan garis singgung dan garis normalnya adalah (1,3) dan (1,-2)

Hitung terlebih dahulu y' dengan menggunakan turunan fungsi implisit

$$D_x(x^2y^2 - xy - 6) = D_x(0) \quad \Leftrightarrow \quad 2xy^2 + 2x^2yy' - (y + xy') - 0 = 0$$

$$2xy^2 + 2x^2yy' - y - xy' = 0$$

$$(2x^2y - x)y' = y - 2xy^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y - 2xy^2}{2x^2y - x}$$

Di titik (1,3)

$$y'|_{(1,3)} = \frac{3 - 2.1.9}{2.1.3 - 1} = \frac{-15}{5} = -3$$

Persamaan garis singgung

$$y - 3 = -3(x - 1) = -3x + 3$$

$$3x + y = 6$$

Persamaan garis normal

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$x - 3y = -8$$

Di titik (1,-2)

$$y'|_{(1,-2)} = \frac{-2-2.1.4}{2.1.(-2)-1} = \frac{-10}{-5} = 2$$

Persamaan garis singgung

$$y+2 = 2(x-1) = 2x-2$$

$$2x - y = 4$$

Persamaan garis normal

$$y+2 = -\frac{1}{2}(x-1) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$x + 2y = -3$$