3. LIMIT DAN KEKONTINUAN

3.1 Limit Fungsi di Satu Titik

Pengertian limit secara intuisi

Perhatikan fungsi

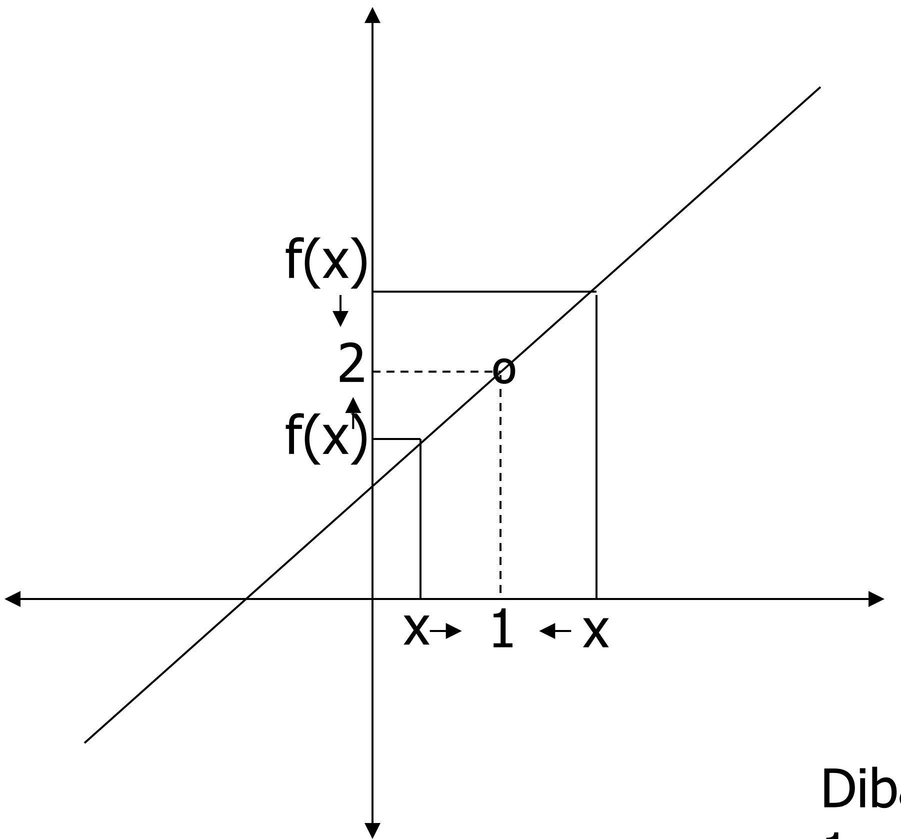
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Fungsi diatas tidak terdefinisi di x=1, karena di titik tersebut f(x) berbentuk 0/0. Tapi masih bisa ditanyakan berapa nilai f(x) jika x mendekati 1

Dengan bantuan kalkulator dapat diperoleh nilai f(x) bila x mendekati 1, seperti pada tabel berikut

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	$\rightarrow$ 1 $\leftarrow$	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\rightarrow$ 2 $\leftarrow$	2.0001	2.001	2.01	2.1

Secara grafik



Dari tabel dan grafik disamping terlihat bahwa f(x) mendekati 2 jika x mendekati 1

Secara matematis dapat dituliskan Sebagai berikut

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Dibaca " limit dari $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk x mendekati 1 adalah 2

Definisi(limit secara intuisi). Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat, tetapi berlainan dengan c, maka f(x) dekat ke L

Contoh

1. $\lim_{x \to 1} 3x + 5 = 8$

2. $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} 2x + 1 = 5$

3. $\lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} = \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x} + 3)}{x - 9} = \lim_{x \to 9} \sqrt{x} + 3 = 6$

4. $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$

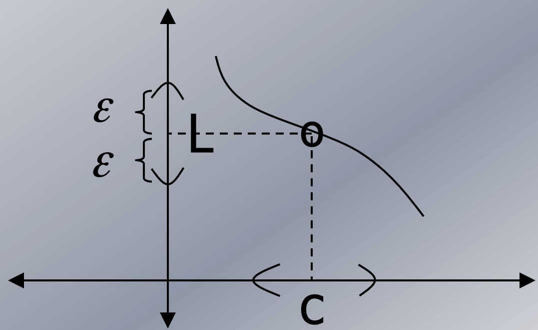
   Ambil nilai x yang mendekati 0, seperti pada tabel berikut

x	$2/\pi$	$2/2\pi$	$2/3\pi$	$2/4\pi$	$2/5\pi$	$2/6\pi$	$2/7\pi$	$2/8\pi$	$\longrightarrow$ 0
$\sin(1/x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	$\longrightarrow$?

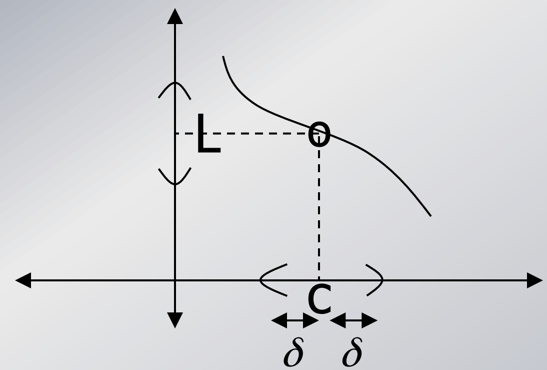
Dari tabel terlihat bahwa bila x menuju 0, sin(1/x) tidak menuju ke satu nilai tertentu sehingga limitnya tidak ada

Definisi limit

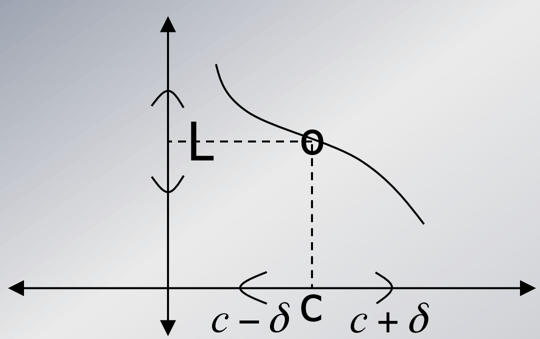
$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{jika} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

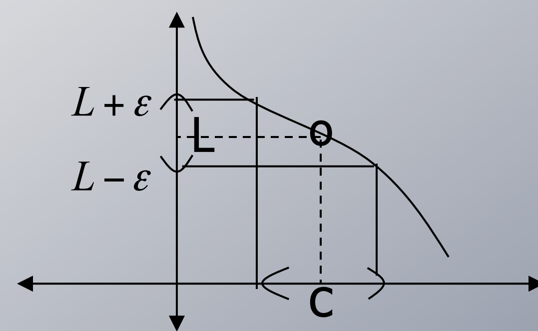


Untuk setiap $\varepsilon > 0$



Terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga





$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Limit Kiri dan Limit Kanan

$x \rightarrow \quad c$

Jika x menuju c dari arah kiri (dari arah bilangan yang lebih kecil dari c, limit disebut limit kiri,

notasi

$$\lim_{x \to c^-} f(x)$$

$c \quad \leftarrow x$

Jika x menuju c dari arah kanan (dari arah bilangan yang lebih besar dari c, limit disebut limit kanan,

notasi

$$\lim_{x \to c^+} f(x)$$

Hubungan antara limit dengan limit sepihak(kiri/kanan)

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Jika $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$ maka $\lim_{x \to c} f(x)$ tidak ada

Contoh Diketahui

1. $$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \; x \le 0 \\ x \, , & 0 < x < 1 \\ 2 + x^2 & , \; x \ge 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{a. Hitung } \lim\limits_{x \to 0} f(x) \\ \text{b. Hitung } \lim\limits_{x \to 1} f(x) \\ \text{c. Hitung } \lim\limits_{x \to 2} f(x) \end{array}\right\} \text{Jika ada}$$

d. Gambarkan grafik f(x)

Jawab

a. Karena aturan fungsi berubah di x=0, maka perlu dicari limit kiri dan limit kanan di x=0

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$$

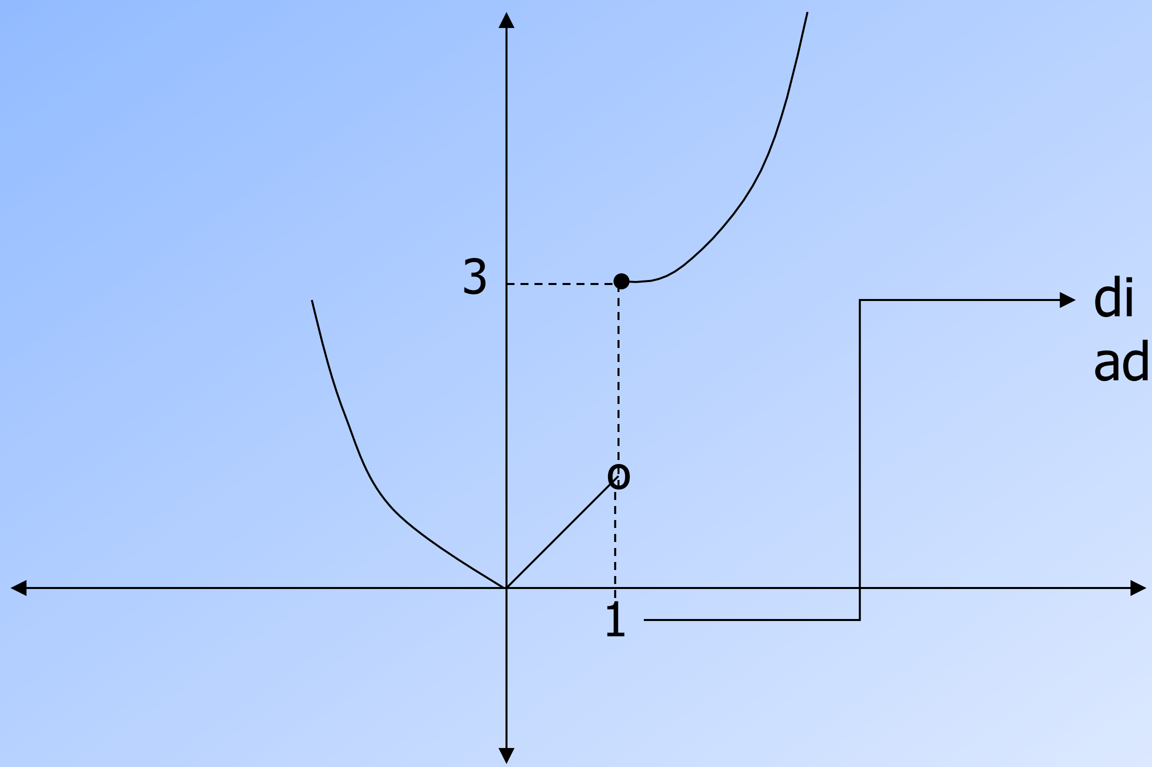
b. Karena aturan fungsi berubah di x=1, maka perlu dicari limit kiri dan limit kanan di x=1

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2 + x^2 = 3\end{array}\right\}$$ Karena $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ Tidak ada

c. Karena aturan fungsi **tidak berubah** di x=2, maka **tidak perlu** dicari limit kiri dan limit kanan di x=2

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 2 + x^2 = 6$$

Grafik f(x)



Untuk $x \leq 0$	Untuk $0<x<1$	Untuk $x \geq 1$
$f(x) = x^2$	$f(x)=x$	$f(x) = 2 + x^2$
Grafik: parabola	Grafik:garis lurus	Grafik: parabola

2. Tentukan konstanta c agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 3 - cx, x < -1 \\ x^2 - c, x \geq -1 \end{cases}$$

mempunyai limit di x=-1

Jawab

Agar f(x) mempunyai limit di x=-1, maka limit kiri harus sama dengan limit kanan

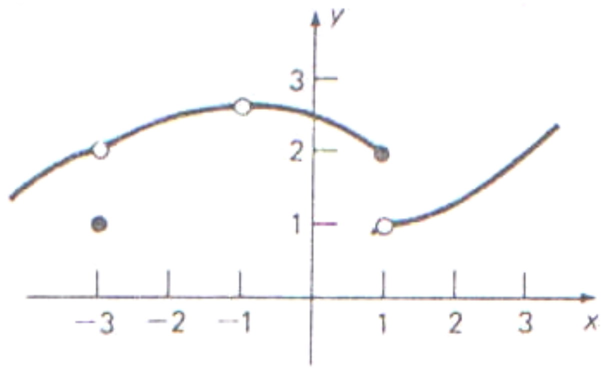
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} 3 - cx = 3 + c \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} x^2 - c = 1 - c \end{aligned}\right\} \text{Agar limit ada} \Rightarrow 3 + c = 1 - c$$

$$\Downarrow$$

C=-1

Soal Latihan

A. Diberikan grafik suatu fungsi *f* seperti gambar berikut .



Cari limit /nilai fungsi berikut, atau nyatakan bahwa limit /nilai fungsi tidak ada.

1. $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$
5. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
6. f(-3)
7. f(-1)
8. f(1)

Soal Latihan

B.

1. Diketahui : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ x^2 - x + 2, & x > 1 \end{cases}$

   a. Hitung $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ dan $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

   b. Selidiki apakah $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ada, jika ada hitung limitnya

2. Diketahui $g(x) = |x-2| - 3x$, hitung (bila ada) :

   a. $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$ b. $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$ c. $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

3. Diketahui $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$, hitung (bila ada)

   a. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ b. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ c. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Sifat limit fungsi

Misal

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to a} g(x) = G$$ (limit dari f , g ada dan berhingga)

maka

1. $$\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm G$$

2. $$\lim_{x \to a} \left[f(x) g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = LG$$

3. $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{G}, bila\ G \neq 0$$

4. $$\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n$$,n bilangan bulat positif

5. $$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$ bila n genap L harus positif

Prinsip Apit

Misal $f(x) \le g(x) \le h(x)$ untuk x disekitar c dan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ serta } \lim_{x \to c} h(x) = L$$

maka

$$\lim_{x \to c} g(x) = L$$

Contoh Hitung $\lim_{x \to 1} (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1}$

Karena $-1 \le \sin(\frac{1}{x-1}) \le 1 \Longrightarrow -(x-1)^2 \le (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1} \le (x-1)^2$

dan

$$\lim_{x \to 1} -(x-1)^2 = 0 \quad , \lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$$

maka

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1} = 0$$

Limit Fungsi Trigonometri

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

2. $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

Contoh

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x + \sin 4x}{5x - \tan 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{3 + \frac{\sin 4x}{4x}.4}{5 - \frac{\tan 2x}{2x}.2} = \frac{3 + \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x}.4}{5 - \lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{2x}.2}$$

$$= \frac{3 + \lim_{4x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x}.4}{5 - \lim_{2x \to 0} \frac{\tan 2x}{2x}.2} = \frac{7}{3}$$

x → 0 ekivalen dgn 4x → 0

Soal Latihan

Hitung

1. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\tan^2 3t}{2t}$

2. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\cot \pi t \, \sin t}{2 \sec t}$

3. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\cos^2 t}{1 + \sin t}$

4. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin 3t + 4t}{t \sec t}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{\sin 2x}$

Limit Tak Hingga dan Limit di Tak Hingga

Limit Tak Hingga

Misal $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ dan $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, maka $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$

$(i)\ +\infty,$ jika $L > 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah atas

$(ii)\ -\infty,$ jika $L > 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah bawah

$(iii)\ +\infty,$ jika $L < 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah bawah

$(iv)\ -\infty,$ jika $L < 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah atas

Ctt : g(x) → 0 dari arah atas maksudnya g(x) menuju 0 dari nilai g(x) positif.

g(x) → 0 dari arah bawah maksudnya g(x) menuju 0 dari nilai g(x) negatif.

Contoh Hitung

a. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x-1}$ b. $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ c. $\lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{x}{\sin x}$

Jawab

a. $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2+1 = 2 > 0$,g(x)=x-1 akan menuju 0 dari arah bawah, karena x → 1 dari kiri berarti x lebih kecil dari 1, akibatnya x-1 akan bernilai negatif

Sehingga

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$$

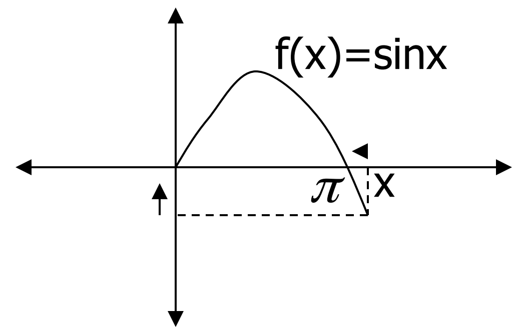
b. $\lim\limits_{x \to -1^-} x^2+1 = 2 > 0$ $g(x) = x^2 - 1$ akan menuju 0 dari arah atas, karena x → -1 dari kiri berarti x lebih kecil dari -1, tapi bilangan negatif yang lebih kecil dari -1 jika dikuadrat kan lebih besar dari 1 sehingga $x^2 - 1$ bernilai positif

Sehingga

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$$

c. Karena

$$\lim_{x \to \pi^+} x = \pi > 0$$ dan



Jika x menuju π dari arah kanan maka nilai sinx menuju 0 dari arah bawah(arah nilai sinx negatif)

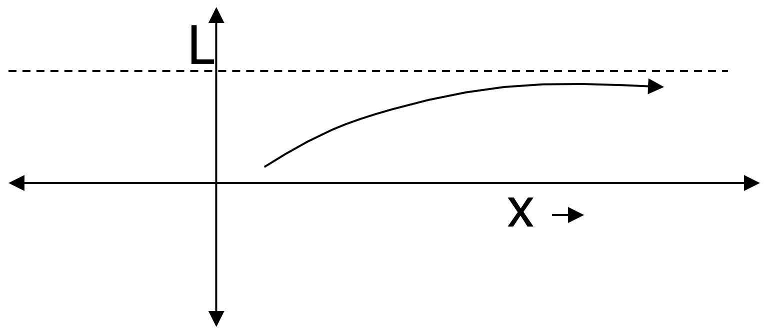
sehingga

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{x}{\sin x} = -\infty$$

Limit di Tak Hingga

a. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ jika $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 \ni x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

atau f(x) mendekati L jika x menuju tak hingga



Contoh Hitung

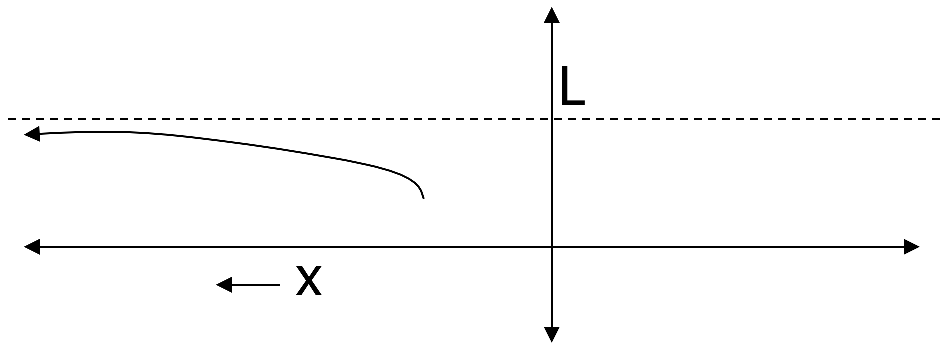
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 + 4}$$

Jawab

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2})}{x^2(2 + \frac{4}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 1/2$$

b. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ jika $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M < 0 \ni x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

atau f(x) mendekati L jika x menuju minus tak hingga



Contoh Hitung

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+5}{2x^2+4}$$

Jawab

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+5}{2x^2+4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(2 + \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{\left(2 + \frac{4}{x^2}\right)} = 0$$

Contoh Hitung

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+3}+x$$

Jawab :

Jika x → ∞ , limit diatas adalah bentuk (∞ – ∞)

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+3}+x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+3}+x\left(\frac{\sqrt{x^2+x+3}-x}{\sqrt{x^2+x+3}-x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+3-x^2}{\sqrt{x^2+x+3}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+3}-x}$$

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+\frac{3}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2})}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+\frac{3}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{-(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1)} = -\frac{1}{2}$$

Soal Latihan

Hitung

1. $$\lim_{x \to 3^+} \frac{3+x}{3-x}$$

2. $$\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{x^2-4}$$

3. $$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$$

4. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+x^2}$$

5. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x}{x+1}$$

6. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$$

Kekontinuan Fungsi

Fungsi $f(x)$ dikatakan **kontinu** pada suatu titik $x = a$ jika

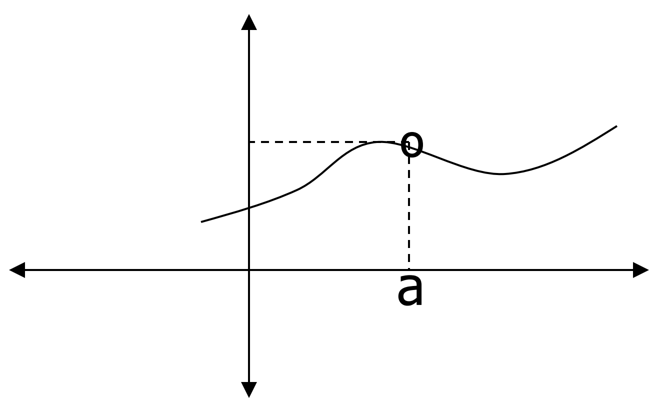
(i) f(a) ada

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ ada

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Jika paling kurang salah satu syarat diatas tidak dipenuhi maka f dikatakan tidak kontinu di x=a

(i)

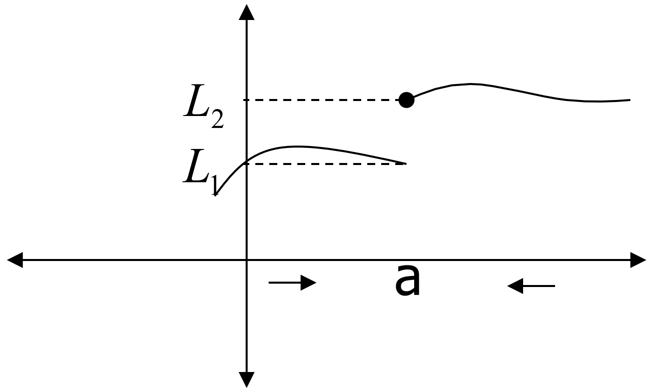


f(a) tidak ada

⇓

f tidak kontinu di x=a

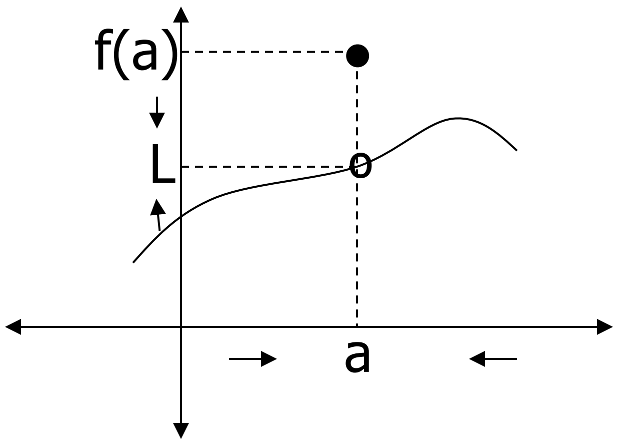
(ii)



Karena limit kiri(L1) tidak sama dengan limit kanan(L2) maka f(x) tidak mempunyai limit di x=a

Fungsi f(x) tidak kontinu di x=a

(iii)



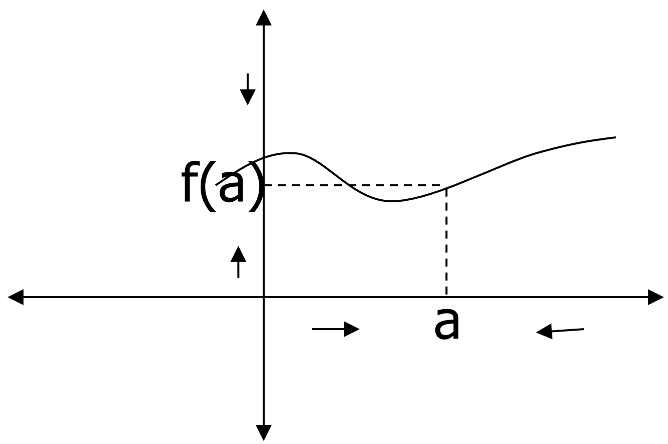
f(a) ada

$\lim_{x \to a} f(x)$ ada

Tapi nilai fungsi tidak sama dengan limit fungsi

Fungsi f(x) tidak kontinu di x=a

(iv)

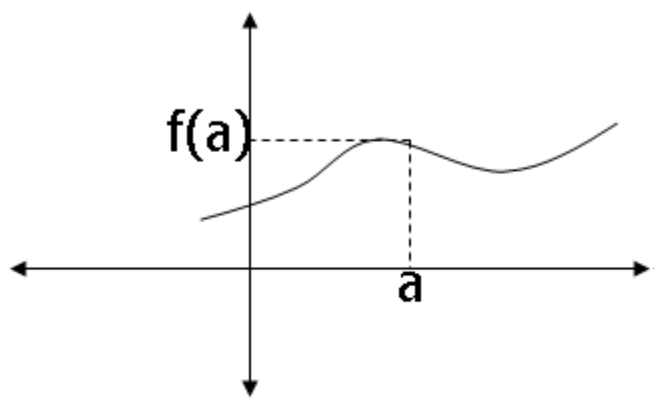


f(a) ada

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ada

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

f(x) kontinu di x=a



Ketakkontinuan terhapus

Ketakkontinuan kasus (i) bisa dihapus dengan cara mendefinisikan nilai fungsi dititik tersebut = limit fungsi contoh

Periksa apakah fungsi berikut kontinu di x=2, jika tidak sebutkan alasannya

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$ c. $f(x) = \begin{cases} x + 1, x < 2 \\ x^2 - 1, x \geq 2 \end{cases}$

Jawab :

a. Fungsi tidak terdefinisi di x=2 (bentuk 0/0) $\Rightarrow$ f(x) tidak kontinu di x=2

b. f(2) = 3

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

$\Downarrow$

Karena limit tidak sama dengan nilai fungsi, maka f(x) **tidak kontinu di x=2**

c. - $f(2) = 2^2 - 1 = 3$

- $$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-} x + 1 = 3 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) &= \lim_{x \to 2^+} x^2 - 1 = 3 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

- $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Karena semua syarat dipenuhi → f(x) kontinu di x=2

Kontinu kiri dan kontinu kanan

Fungsi f(x) disebut kontinu kiri di x=a jika

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Fungsi f(x) disebut kontinu kanan di x=a jika

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Fungsi f(x) kontinu di x=a jika kontinu kiri dan kontinu kanan di x=a

Contoh : Tentukan konstanta a agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x + a, x < 2 \\ ax^2 - 1, x \geq 2 \end{cases}$$

Kontinu di x=2

Jawab :

Agar f(x) kontinu di x=2, haruslah

f kontinu kiri di x=2

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x + a = 2 + a \qquad f(2) = a2^2 - 1 = 4a - 1$$

$$2 + a = 4a - 1$$
$$-3a = -3$$
$$a = 1$$

f kontinu kanan di x=2

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(2) = a2^2 - 1 = 4a - 1 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} ax^2 - 1 = 4a - 1 \end{array}\right\} \text{Selalu dipenuhi}$$

Soal Latihan

1. Diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x \le -1 \\ 2x + 2, x > -1 \end{cases}$

   selidiki kekontinuan fungsi f(x) di *x* = -1

2. Agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \ x < 1 \\ ax + b, 1 \le x < 2 \\ 3x, x \ge 2 \end{cases}$$

   kontinu pada **R**, maka berapakah *a* + 2*b* ?

3. Tentukan *a* dan *b* agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 + bx - 4}{x - 2}, & x < 2 \\ 2 - 4x, & x \ge 2 \end{cases}$$

   kontinu di *x* = 2

Kekontinuan pada interval

- Fungsi $f(x)$ dikatakan **kontinu pada interval buka** (a,b) bila $f(x)$ kontinu pada setiap titik di dalam interval tersebut.

- Sedangkan $f(x)$ dikatakan **kontinu pada interval tutup** $[a,b]$ bila :

  1. $f(x)$ kontinu pada (a,b)
  2. $f(x)$ kontinu kanan di $x = a$
  3. $f(x)$ kontinu kiri di $x = b$

Bila $f(x)$ kontinu untuk setiap nilai $x \in \boldsymbol{R}$ maka dikatakan $f(x)$ kontinu (dimana-mana).

- **Teorema 3.2**
- Fungsi Polinom kontinu dimana-mana
- Fungsi Rasional kontinu pada Domainnya
- Misalkan $f(x) = \sqrt[n]{x}$, maka
  - f(x) kontinu di setiap titik di ***R*** jika n ganjil
  - $f(x)$ kontinu di setiap ***R*** positif jika n genap.

Contoh : tentukan selang kekontinuan $f(x) = \sqrt{x-4}$

Dari teorema diatas diperoleh f(x) kontinu untuk x-4>0 atau x>4.

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} = 0 = f(4)$ $\Rightarrow$ f(x) kontinu kanan di x=4

Sehingga f(x) kontinu pada [4, ∞)

Soal Latihan

A. Carilah titik diskontinu dari fungsi

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 3}$

3. $f(x) = \dfrac{x - 2}{|x| - 2}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

B. Tentukan dimana *f(x)* kontinu

1. $f(x) = \dfrac{x - 1}{4 - \sqrt{x^2 - 9}}$

2. $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

Limit dan Kekontinuan Fungsi Komposisi

- **Teorema Limit Fungsi Komposisi:**

  Jika $\lim_{x \to a} g(x) = L$ dan $f(x)$ kontinu di L, maka

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(L)$$

- **Teorema kekontinuan fungsi komposisi:**

  Jika $g(x)$ kontinu di a, $f(x)$ kontinu di $g(a)$, maka fungsi $(f \circ g)(x)$ kontinu di a.

  Bukti

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a}(f \circ g)(x) &= \lim_{x \to a} f(g(x)) \\ &= f(\lim_{x \to a} g(x)) && \text{karena f kontinu di g(a)} \\ &= \mathrm{f(g(a))} && \text{karena g kontinu di a} \\ &= \mathrm{(fog)(a)} \end{aligned}$$

Contoh Tentukan dimana fungsi

$$f(x) = \cos\left(\frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 + 3x - 4}\right)$$

kontinu

Jawab :

Fungsi f(x) dapat dituliskan sebagai komposisi dua fungsi atau

$$f(x) = (g \circ h)(x)$$

dengan

$$h(x) = \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 + 3x - 4} \quad \text{dan } g(x) = \cos x$$

Karena h(x) kontinu di R-{-4,1} dan g(x) kontinu dimana-mana maka fungsi f(x) kontinu di R-{-4,1}