2. FUNGSI

2.1 Fungsi dan Grafik

Definisi : Fungsi dari R (bilangan real) ke R adalah suatu aturan yang mengaitkan (memadankan) setiap $x \in R$ dengan tepat satu $y \in R$

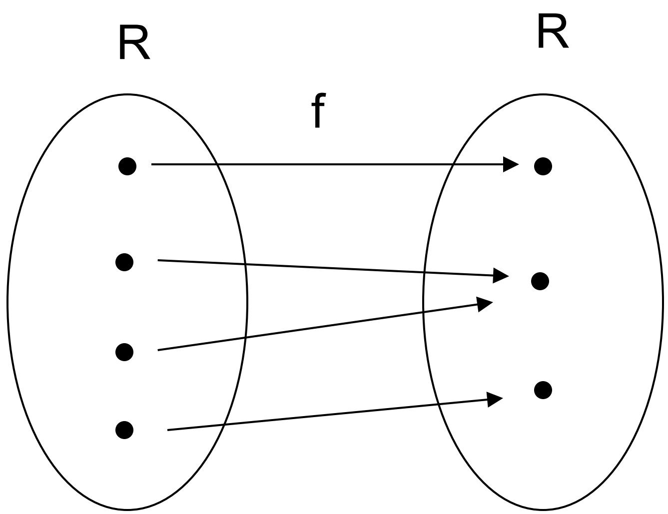
Notasi : $f : R \longrightarrow R$

$$x \mapsto y = f(x)$$

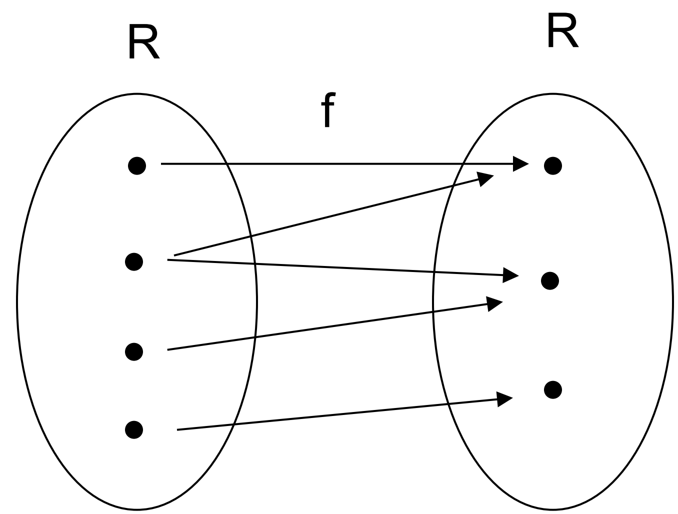
x disebut peubah bebas, y peubah tak bebas

Contoh

1. $f(x) = x^2 + 2x + 4$
2. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
3. $f(x) = x^2, -2 \le x \le 3$



f suatu fungsi



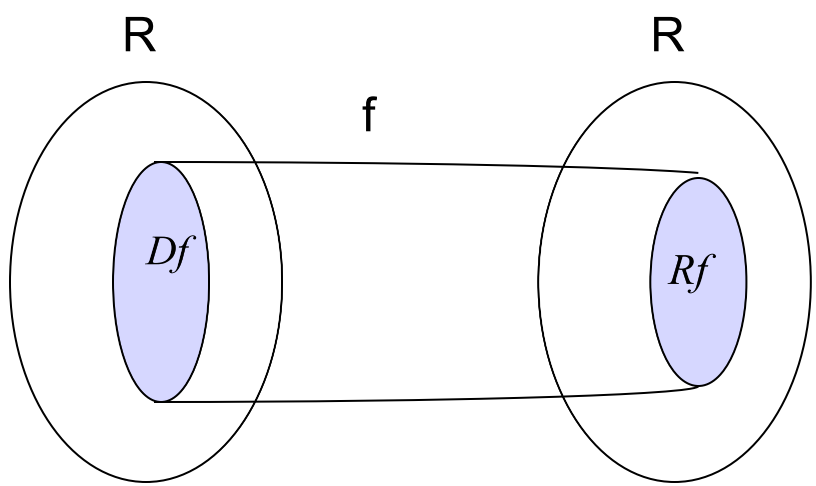
f bukan fungsi

Domain / daerah asal dari $f(x)$, notasi ***Df*** , yaitu

$$D_f = \{x \in R \mid f(x) \in R\}$$

Daerah nilai / Range dari $f(x)$, notasi ***Rf*** , yaitu

$$R_f = \{f(x) \in R \mid x \in D_f\}$$



Contoh Tentukan daerah asal dan daerah nilai dari

1. $f(x) = x^2 + 2x + 4$
2. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$

Jawab :

1. Karena fungsi f(x) selalu terdefinisi untuk setiap x maka

$$D_f = \{x \in R\} = (-\infty, \infty)$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 4 = \underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} + 3 \Rightarrow R_f = [3, \infty)$$

2. $D_f = \{x \in R \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$

Karena $\sqrt{x} \geq 0$ untuk $x \geq 0$ $\Rightarrow$ $f(x) = 1 + \sqrt{x} \geq 1$

$\Downarrow$

$$R_f = [1, \infty)$$

Grafik Fungsi

Misal y = f(x), himpunan titik

$$\{(x,y)\,|\,x\in D_f,\, y\in R_f\}$$

disebut grafik fungsi f

Grafik fungsi sederhana

a. Fungsi linear

$$f(x) = ax + b$$

Grafik berupa garis lurus

Cara menggambar : tentukan titik potong dgn sumbu x dan sumbu y

Contoh

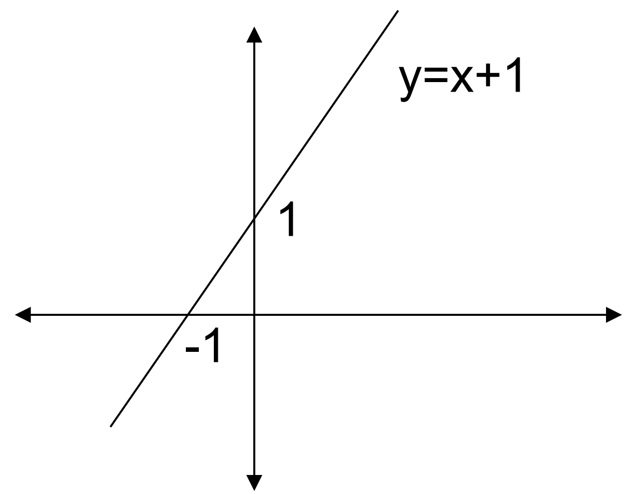
Gambarkan grafik y = x + 1

Titik potong dgn sumbu x

$y = 0 \longrightarrow x = -1 \longrightarrow (-1,0)$

Titik potong dgn sumbu y

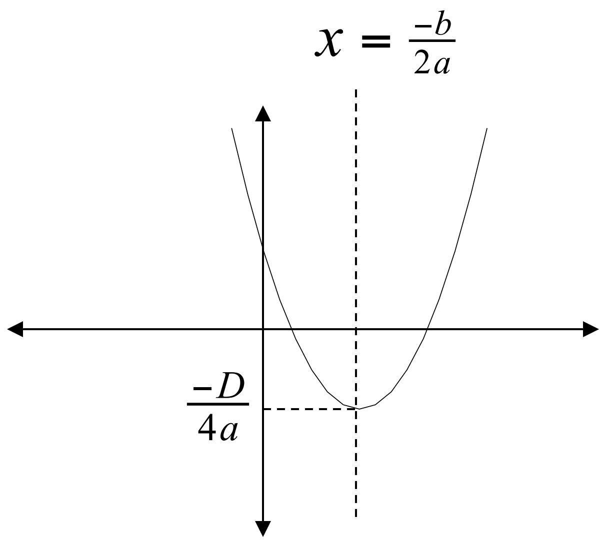
$x = 0 \longrightarrow y = 1 \longrightarrow (0,1)$



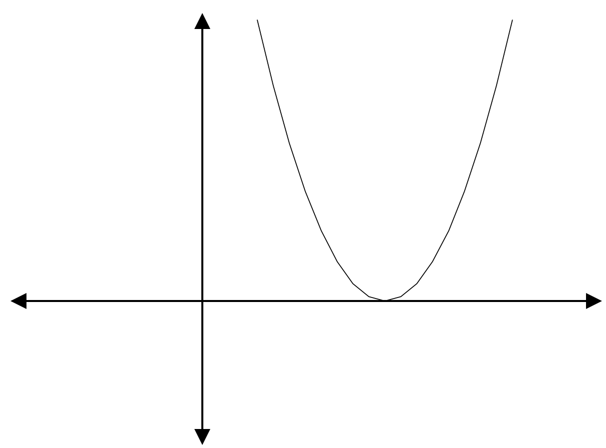
b. Fungsi Kuadrat

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

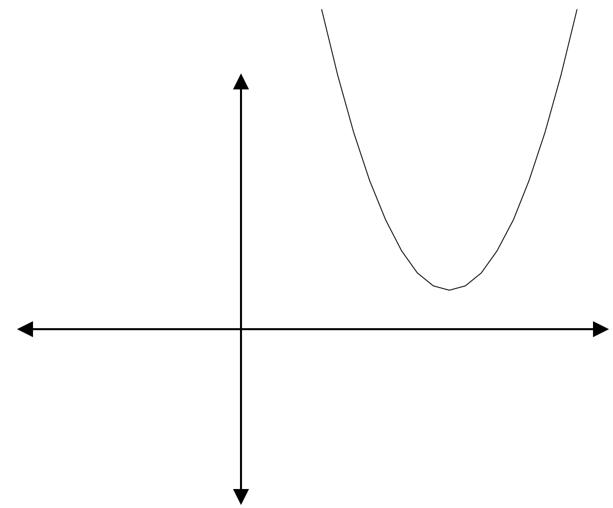
Grafik berupa parabola. Misal $D = b^2 - 4ac$



a>0, D>0

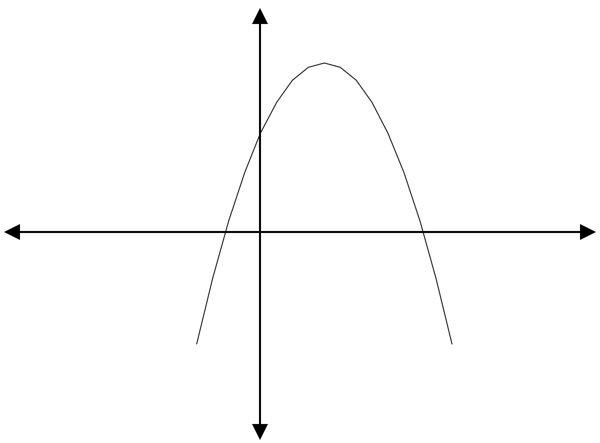


a>0, D=0

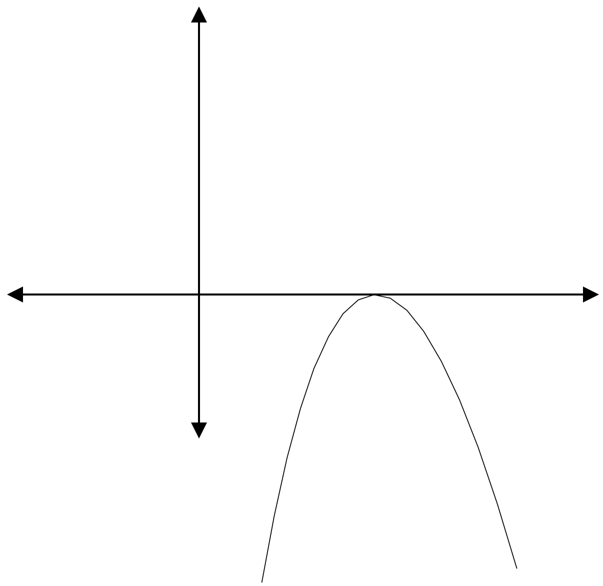


a>0, D<0

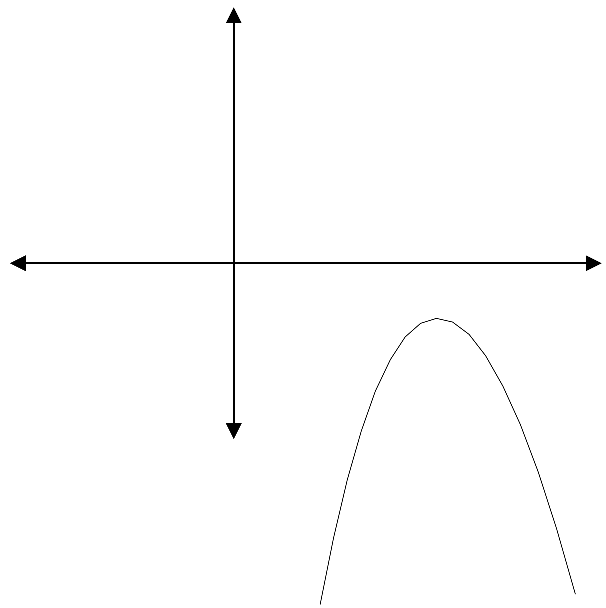
a<0, D>0



a<0, D=0



a<0, D<0



Menggambar Grafik Fungsi dengan Pergeseran

- Jika diketahui grafik fungsi $y = f(x)$, maka :
- Grafik $y=f(x-h)+k$ diperoleh dengan cara menggeser grafik $y = f(x)$

  (i) sejauh ***h*** satuan ke kanan jika ***h*** positif dan ***k*** satuan ke atas jika ***k*** positif

  (ii) sejauh ***h*** satuan ke kiri jika ***h*** negatif dan ***k*** satuan ke bawah jika ***k*** negatif.

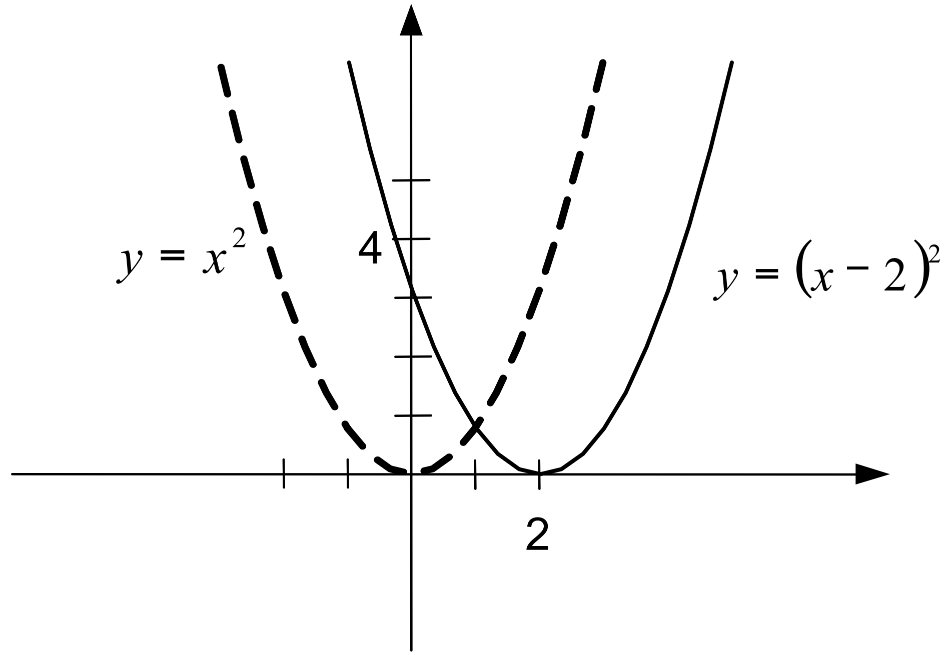
Contoh Pergeseran

1. Gambarkan grafik fungsi

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$
$$= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 5$$
$$= (x-2)^2 + 1$$

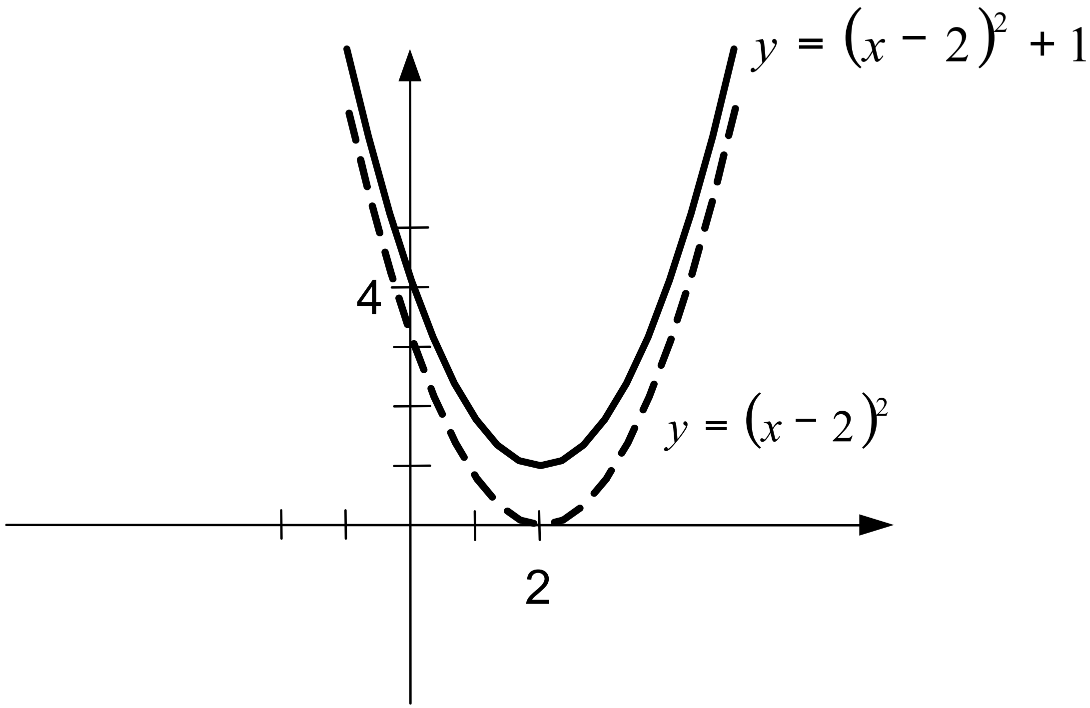
$$y = (x-2)^2$$

$\rightarrow$ $y = x^2$ digeser sejauh 2 ke kanan



Kemudian $y = (x-2)^2$ digeser sejauh 1 ke atas

maka akan terbentuk $y = (x-2)^2 + 1$



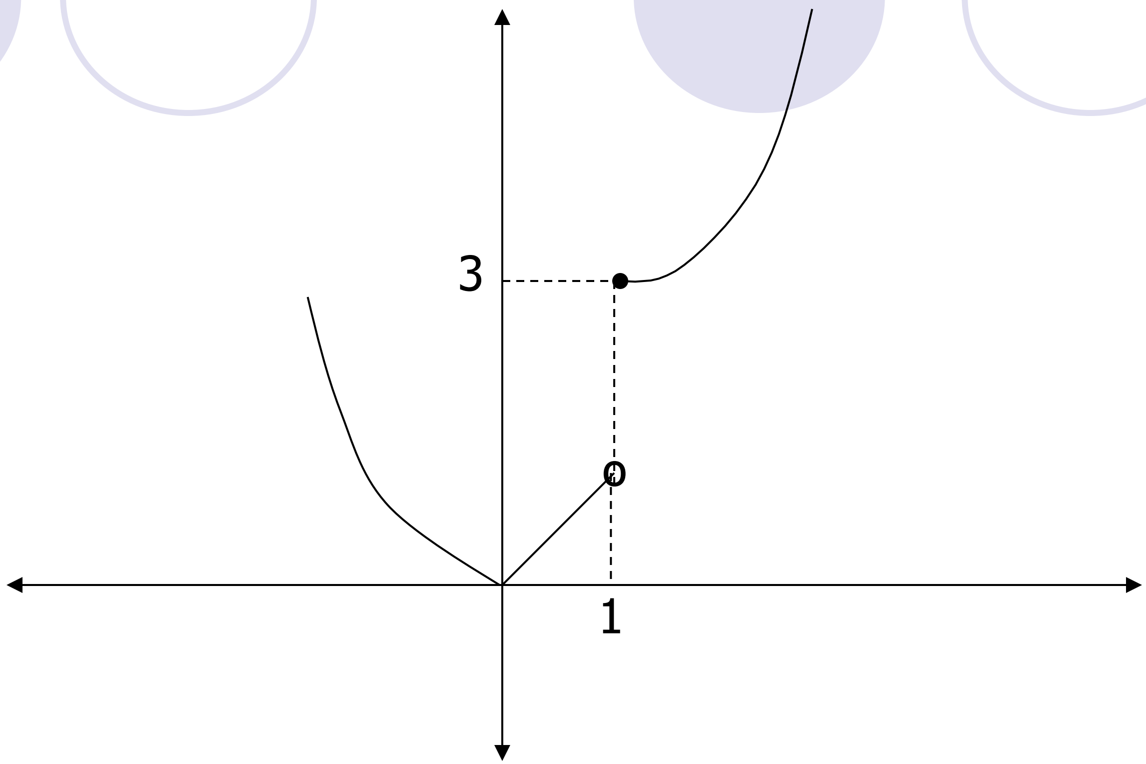
c. Fungsi Banyak Aturan

Bentuk umum

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) \\ \quad . \\ \quad . \\ g_n(x) \end{cases}$$

Contoh Gambarkan grafik

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \le 0 \\ x \ , & 0 < x < 1 \\ 2 + x^2 & , \ x \ge 1 \end{cases}$$



Untuk $x \leq 0$

$$f(x) = x^2$$

Grafik: parabola

Untuk $0<x<1$

$$f(x)=x$$

Grafik:garis lurus

Untuk $x \geq 1$

$$f(x) = 2 + x^2$$

Grafik: parabola

2.2 Jenis-jenis Fungsi

1. Fungsi polinom (suku banyak)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Fungsi suku banyak terdefinisi dimana-mana(R)

2. Fungsi Rasional :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

dengan $p(x)$ dan $q(x)$ merupakan fungsi polinom , dan $q(x) \neq 0$.

Fungsi rasional terdefinisi dimana-mana kecuali dipembuat nol *q(x)*

contoh

$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ terdefinisi di mana², kecuali di x = 2, dan x = -2

$\Rightarrow$ $D_f = R - \{2, -2\}$

3. Fungsi genap dan fungsi ganjil

Definisi : Fungsi f disebut fungsi ganjil jika f(-x) = - f(x)
Grafik fungsi ganjil simetri terhadap titik asal

contoh

$f(x) = x^3$ ganjil karena $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

Fungsi f disebut fungsi genap jika f(-x) = f(x)
Grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu y

contoh

$f(x) = x^2$ genap karena $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

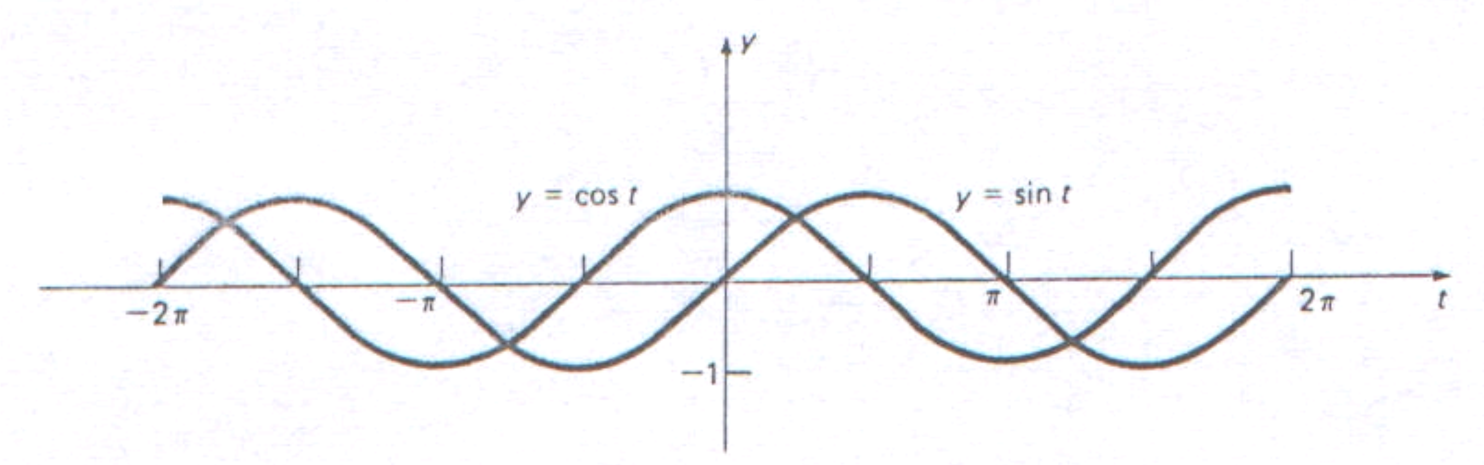
4. Fungsi periodik

Fungsi $f(x)$ disebut periodik dengan perioda p jika $f(x+p) = f(x)$.

Contoh

$f(x) = \sin x$ fungsi periodik dengan perioda 2π karena

$$
\begin{aligned}
f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) &= \sin x \cos(2\pi) + \cos x \sin 2\pi \\
&= \sin x = f(x)
\end{aligned}
$$



5. Fungsi Bilangan Bulat Terbesar

$$f(x) = \| x \|$$

yaitu bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x.*

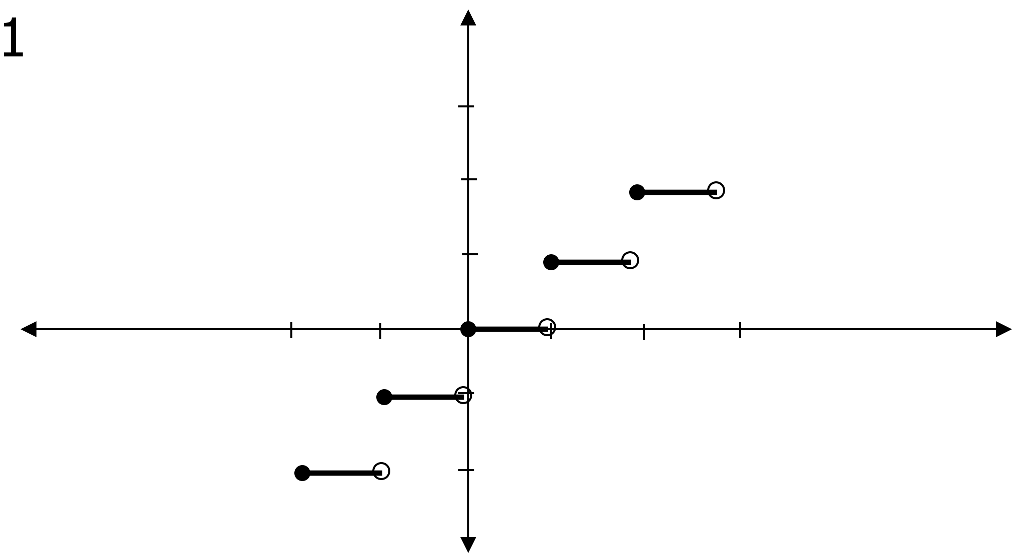
Notasi lain : $f(x) = [x]$

Contoh :

||5,9|| = 5

, ||-2,6|| = -3 ,||-0,9|| = -1

, ||1||=1



2.3 Operasi Fungsi

A. **Operasi aljabar**

- **Definisi:** Misalkan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai daerah asal D_f dan D_g , maka

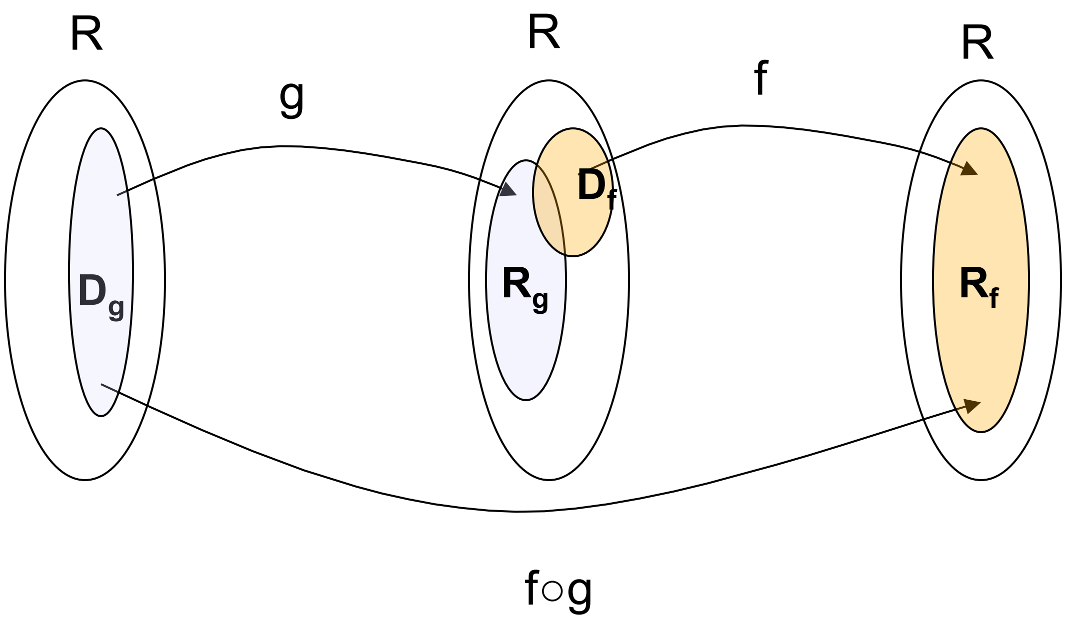
  - $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$
  - $(f.g)(x) = f(x).g(x), \quad D_{f.g} = D_f \cap D_g$
  - $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \;, \; g(x) \neq 0 \;, \; D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

B. Fungsi Komposisi

Definisi: Komposisi dari fungsi *f*(*x*) dengan *g*(*x*) didefinisikan sebagai

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Syarat yang harus dipenuhi agar *f o g* ada (terdefinisi) adalah $R_g \cap D_f \neq \emptyset$



Sifat-sifat fungsi komposisi :

- f o g ≠ g o f .

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$R_{f\circ g} = \{y \in R_f \mid y = f(t),\, t \in R_g\}$$

- **Contoh:**

  Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2 - 1$

  Tentukan (jika ada), $f \circ g$ dan $D_{f\circ g}$, $R_{f\circ g}$

Jawab :

$$f(x)=\sqrt{x} \longrightarrow D_f=[0,\infty) \;, R_f=[0,\infty)$$

$$g(x)=x^2-1 \longrightarrow D_g=R \;, R_g=[-1,\infty)$$

Karena

$$R_g \cap D_f=[-1,\infty)\cap[0,\infty)=[0,\infty)\neq\varnothing$$

maka f o g terdefinisi, dan

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-1)=\sqrt{x^2-1}$$

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R \mid x^2 - 1 \in [0,\infty)\}$$

$$= \{x \in R \mid x^2 - 1 \ge 0\} = \{x \in R \mid (x-1)(x+1) \ge 0\}$$

$$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

$$R_{f\circ g} = \{y \in R_f \mid y = f(t)\ ,\ t \in R_g\}$$

$$= \{y \in [0,\infty) \mid y = \sqrt{t}\ ,\ t \ge -1\} = [0,\infty).$$